最難関問題

アルキメデスの立体・切頂四面体

図１のように１辺の長さが３㎝の正四面体を，各辺を３等分する点を通る平面で切断し，図２の立体Ｘを作りました。次の問いに答えなさい。

図１

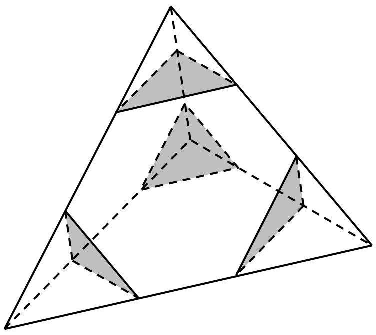
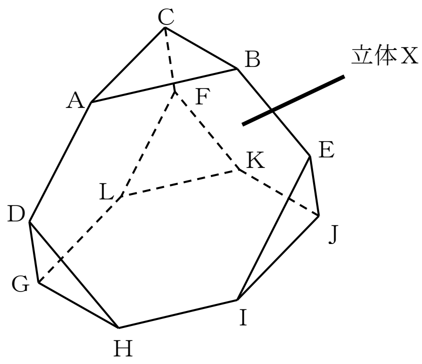


図２



（１）立体Ｘを，頂点Ｄを通って面ＡＢＣと平行な平面で切断したときの切り口と，面ＧＨＩＪＫＬの面積の比を求めなさい。

（２）立体Ｘを，辺ＤＨの点Ｐを通って面ＡＢＣと平行な平面で切断したところ，切り口の面積は面ＡＢＣの面積の５.６８倍になりました。

① 切り口の周りの長さを求めなさい。

② 長さの比ＤＰ：ＰＨを求めなさい。

最難関問題

アルキメデスの立体・切頂四面体（１）２：３　（２）①　６㎝　②　３：２

立体Ｘは正三角形４個と正六角形４個からなるすべての辺の長さが等しい８面体で，正四面体の頂点を切り落として作ることができるために切頂四面体といいます。すべての面が合同である正四面体や立方体，正八面体といった正多面体に対し，面の形が２種類以上あるこのような多面体をアルキメデスの立体といいます。

（１）頂点Ｄを通り面ＡＢＣと平行な切断面は，図３のような正三角形ＤＥＦになります。正三角形ＤＥＦの１辺の長さは$３\times\frac{2}{3}$＝２（㎝）です。また，面ＧＨＩＪＫＬは１辺１㎝の正六角形です。図４のように正三角形ＤＥＦは１辺が１㎝の正三角形４個分の面積，正六角形ＧＨＩＪＫＬは１辺が１㎝の正三角形６個分の面積ですから，４：６＝２：３です。

図３

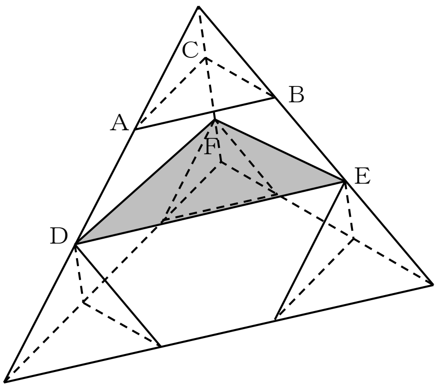
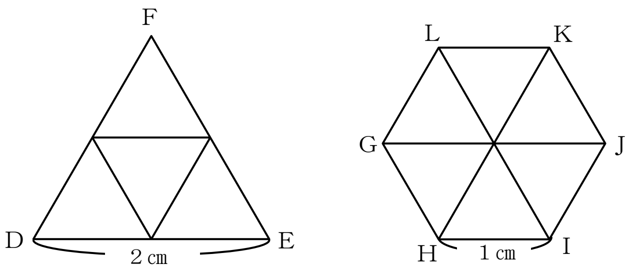


図４

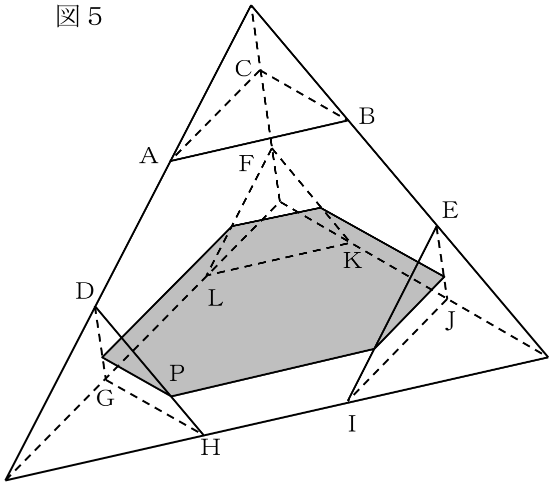


最難関問題

（２）面ＡＢＣと面ＧＨＩＪＫＬは平行ですから，点Ｐを通って面ＡＢＣと平行な切断面は図５のようにそれぞれの辺が正六角形ＧＨＩＪＫＬと平行な六角形になります。

① Ｐ＝Ｈのとき切断面は正六角形ＧＨＩＪＫＬで，Ｐ＝Ｄのとき切断面は正三角形ＤＥＦです。どちらの場合も周りの長さは６㎝です。切断面の辺のうち，辺ＧＨ，ＩＪ，ＫＬと平行な辺はＰの位置に比例して１㎝から０㎝になり，辺ＨＩ，ＪＫ，ＬＧと平行な辺はＰの位置に比例して１㎝から２㎝になります。よって，切断面の周りの長さは常に６㎝です。

図５



② 切断面の六角形はそれぞれの辺が正六角形ＧＨＩＪＫＬと平行なので，全ての内角が１２０度ですから，図６のように辺をのばして正三角形を作ることができます。辺ＨＩ，ＪＫ，ＬＧと平行な辺の長さをａ㎝，辺ＧＨ，ＩＪ，ＫＬと平行な辺の長さをｂ㎝とすると，（ａ＋ｂ）×３＝６㎝より，ａ＋ｂ＝６÷３＝２（㎝）です。矢印のように１辺ｂ㎝の正三角形を移動させると，切断面の面積は図７のように１辺２㎝の正三角形と斜線部分の平行四辺形の和に等しくなります。１辺２㎝の正三角形の面積は１辺１㎝の正三角形の面積の２×２＝４（倍）ですから，斜線部分の平行四辺形の面積は１辺１㎝の正三角形の５.６８－４＝１.６８（倍）です。平行四辺形の２つの辺の長さはａ㎝とｂ㎝ですから，ａ×ｂ＝１.６８÷２＝０.８４となります。

図６

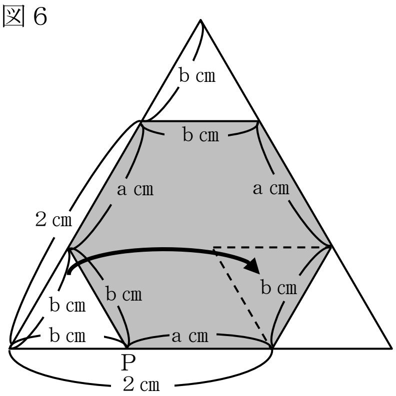
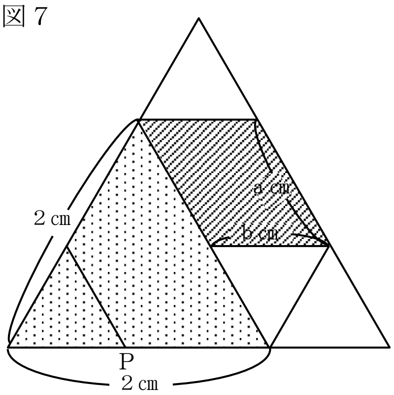


図７



最難関問題

ａ＋ｂ＝２，ａ×ｂ＝０.８４ということがわかりました。ａ＋ｂ＝２になるのは，ａは正六角形ＧＨＩＪＫＬの１辺の長さ１㎝よりも□大きい値，ｂは１よりも□小さい値をとるためです。よって，ａ×ｂ＝（１＋□）×（１－□）＝０.８４です。ここで，面積図を使ってかけ算を表すと，図８のようになります。（１＋□）×（１－□）＝（１－□）＋（□－□×□）＝１－□×□＝０.８４より，□×□＝１－０.８４＝０.１６ですから，□＝０.４です。よって，ａ＝１＋０.４＝1.4，ｂ＝１－０.４＝０.６です。図９においてＰＱの長さは０.６㎝ですから，斜線部分の三角形ＤＱＰとＤＧＨは０.６：１＝３：５の相似です。よって，ＤＰ：ＰＨ＝３：（５－３）＝３：２です。

図８

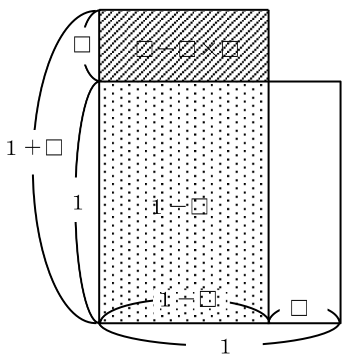


図９