

## 最難関問題

次の問いに答えなさい。

(1) 3つの数から2つずつを選んで、(小さい数) ÷ (大きい数) を計算したところ、答えは  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  になりました。3つの数の比として考えられるものをすべて求めなさい。

(2) 3つの数から2つずつを選んで、(小さい数) ÷ (大きい数) を計算したところ、答えは  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$  になりました。3つの数の比として考えられるものをすべて求めなさい。

(3) 6つの数から2つずつを選んで、(小さい数) ÷ (大きい数) を計算したところ、答えは、

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{5}{11}, \frac{7}{11}$$

になりました。6つの数の比として考えられるものをすべて求めなさい。

最難関問題

- 逆比の双対性 (1)  $1 : 2 : 3$ ,  $2 : 3 : 6$  (順番が異なっても正解)  
 (2)  $2 : 3 : 5$ ,  $6 : 10 : 15$  (順番が異なっても正解)  
 (3)  $1 : 2 : 3 : 5 : 7 : 11$ ,  
 $210 : 330 : 462 : 770 : 1155 : 2310$  (順番が異なっても正解)

(1) 商が  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  であることから、3つの数の比は  $1 : 2$ ,  $1 : 3$ ,  $2 : 3$  であることがわかります。  
 これらを連比して3つの整数の比を求めます、

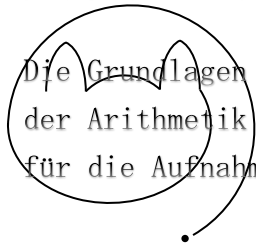
$\begin{array}{r} 1 : 2 \\ 1 : 3 \\ \hline 1 : 2 : 3 \\ \updownarrow \text{一致} \\ 2 : 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 : 2 \\ 3 : 1 \\ \hline 3 : 6 : 1 \\ \updownarrow \text{不一致} \\ 3 : 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 : 2 \\ 2 : 3 \\ \hline 2 : 4 : 3 \\ \updownarrow \text{不一致} \\ 3 : 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 : 2 \\ 3 : 2 \\ \hline 3 : 6 : 2 \\ \updownarrow \text{一致} \\ 3 : 1 \end{array}$
--	---	---	--

以上より、 $1 : 2 : 3$ ,  $2 : 3 : 6$ です。

(2) 商が  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$  であることから、3つの数の比は  $3 : 5$ ,  $2 : 3$ ,  $2 : 5$  であることがわかります。  
 これらを連比して3つの整数の比を求めます、

$\begin{array}{r} 3 : 5 \\ 2 : 3 \\ \hline 6 : 10 : 9 \\ \updownarrow \text{不一致} \\ 5 : 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 : 5 \\ 3 : 2 \\ \hline 3 : 5 : 2 \\ \updownarrow \text{一致} \\ 5 : 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 : 5 \\ 2 : 5 \\ \hline 6 : 10 : 15 \\ \updownarrow \text{一致} \\ 2 : 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 : 5 \\ 5 : 2 \\ \hline 15 : 25 : 6 \\ \updownarrow \text{不一致} \\ 3 : 2 \end{array}$
--	--	--	---

以上より、 $2 : 3 : 5$ ,  $6 : 10 : 15$ です。



## 最難関問題

(3) ここまでの2問を解いたところで気づいておきたいのは、 $1 : 2 : 3$ と $2 : 3 : 6$ 、 $2 : 3 : 5$ と

$6 : 10 : 15$ はそれぞれ逆比の関係にあるということです。 $a : b : c$ の逆比は、 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = b \times c : a \times c : a \times b$ です。 $b \times c : a \times c = b : a$ 、 $b \times c : a \times b = c : a$ 、 $a \times c : a \times b = c : b$ より、逆比を取った場合、2個ずつ選びだした比は順番のみが逆になります。

4個以上の比の場合にも、同じことは言えるのでしょうか。 $a : b : c : \dots$ の場合、逆比は  $b \times \boxed{c \times \dots} : a \times \boxed{c \times \dots}$  となります。 $\boxed{c \times \dots}$ の部分は同じですから、割り算をすると  $b : a$  となるので、順番を入れかえただけでもとと同じ比が成り立ちます。このように、逆比には双対性があります。

逆比の授業ではよく、2個の比  $a : b$  の逆比は順番を逆にして  $b : a$  とできるが、3個以上になると、例えば  $a : b : c$  を  $c : a : b$  などに入れかえても逆比にならないので、順番を入れかえるのではなく

て逆数を取って  $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$  とする、と教えられます。それはもちろん正しいのですが、実のところ、逆比は2個ずつ取った比の順番を逆にすればよいのです。

$$\begin{array}{ccc}
 a & : & b & : & c \\
 & & \updownarrow & & \\
 & & \text{順番を逆にする} & & \\
 & & \updownarrow & & \\
 b & : & a & & \\
 & & \updownarrow & & \\
 c & & : & & a \\
 \hline
 b \times c & : & a \times c & : & a \times b \\
 & & \updownarrow & & \\
 & & \text{一致} & & \\
 & & \updownarrow & & \\
 c & : & b & & 
 \end{array}$$

よって、(3)は次のように解くことができます。まず、15個の分数  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{11}, \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{5}{11}, \frac{7}{11}$  から、 $1 : 2 : 3 : 5 : 7 : 11$  はすぐに見つかります。つぎに、この逆比として、 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 : 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 : 1 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 : 1 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11 : 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11 : 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 2310 : 1155 : 770 : 462 : 330 : 210$  を求めます。