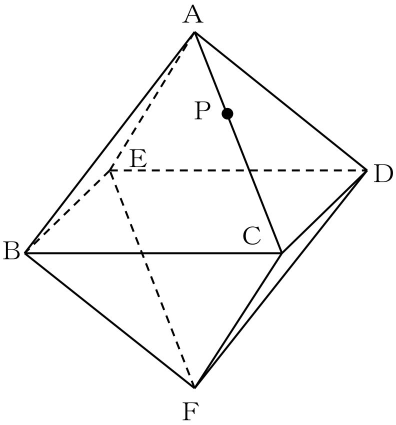
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

点の頂点移動・１



右の図のような正八面体ＡＢＣＤＥＦがあります。点Ｐは最初頂点Ａに重なっていて，１秒ごとに辺を１本通ってとなりあう頂点のいずれかに移動します。

（１）点Ｐが，３秒後に頂点Ｂに重なるような移動の仕方は何通りありますか。また，４秒後に頂点Ａに重なるような移動の仕方は何通りありますか。

（２）点Ｐが，６秒後に頂点Ａに重なるような移動の仕方は何通りありますか。

（３）□秒後，点Ｐが頂点Ａに重なるような移動の仕方と，頂点Ｂに重なるような移動の仕方の差がはじめて１０００通りをこえました。□にあてはまる数を答えなさい。

最難関問題

点の頂点移動・１　（１）１２通り，４８通り　（２）７０４通り　（３）１１

（１）３秒後に頂点Ｂと重なるためには，２秒後に頂点Ａ，Ｃ，Ｅ，Ｆのいずれかと重なっていなければなりません。

２秒後に頂点Ａと重なる移動の仕方は，図１のようにＡ→Ｂ→Ａと移動するか，Ａ→Ｃ→Ａ，Ａ→Ｄ→Ａ，Ａ→Ｅ→Ａと移動するかのいずれかですから，４通りです。

２秒後に頂点Ｃと重なる移動の仕方は，図２のようにＡ→Ｂ→Ｃと移動するか，Ａ→Ｄ→Ｃと移動するかですから，２通りです。２秒後に頂点Ｅと重なる移動の仕方も同じく２通りです。

２秒後に頂点Ｆと重なる移動の仕方は，図３のようにＡ→Ｂ→Ｆと移動するか，Ａ→Ｃ→Ｆ，Ａ→Ｄ→Ｆ，Ａ→Ｅ→Ｆと移動するかのいずれかですから，４通りです。

図１

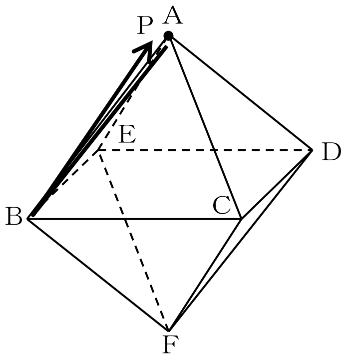


図２

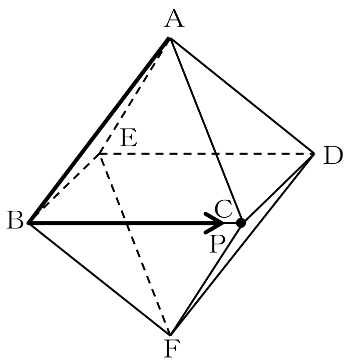
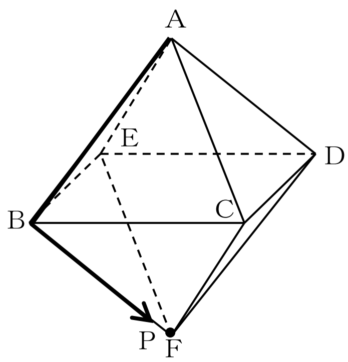


図３



よって，３秒後に頂点Ｂと重なるような移動の仕方は，４×２＋２×２＝１２（通り）です。

また，４秒後に頂点Ａと重なるためには，３秒後に頂点Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅのいずれかと重なっていなければなりませんから，４秒後に頂点Ａと重なるような移動の仕方は，１２×４＝４８（通り）です。

最難関問題

（２）□秒後に頂点Ａと重なるような移動の仕方がｘ通り，頂点Ｂ（およびＣ，Ｄ，Ｅ）と重なるような移動の仕方がｙ通り，頂点Ｆと重なるような移動の仕方がｚ通りあるとします。このとき，□＋１秒後にそれぞれの頂点と重なる方法が何通りあるかを考えます。頂点Ａと重なる方法は，頂点Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅから移動するので，４×ｙ通りです。頂点Ｆと重なる方法も，頂点Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅから移動するので，４×ｙ通りです。頂点Ｂ（およびＣ，Ｄ，Ｅ）と重なる方法は，頂点Ａ，Ｆ，Ｃ，Ｅから移動するので，（ｘ＋ｚ＋２×ｙ）通りです。このことから，フィボナッチ数列のように表によって順に移動の仕方を求めることができます。

時間(秒後)	0	1	2	3	4	5	6
ｘ（通り）	1	0	4	8	４８	１６０	７０４
ｙ（通り）	0	1	2	１２	４０	１７６	６７２
ｚ（通り）	0	0	4	8	４８	１６０	７０４

よって，７０４通りです。

（３）ｘとｙの差を調べると，１秒後以降は下のように１秒ごとに２倍されます。

時間(秒後)	0	1	2	3	4	5	6
ｘ（通り）	1	0	4	8	４８	１６０	７０４
ｙ（通り）	0	1	2	１２	４０	１７６	６７２
差（通り）	1	1	2	4	8	１６	３２

□秒後のｘとｙの差をｎとすると，□＋１秒後には４×ｙとｘ＋ｚ＋２×ｙ＝２×ｘ＋２×ｙの差が，２×ｘと２×ｙの差より，２×ｎとなるためです。３２に引き続いて差を２倍していくと，６４，１２８，２５６，５１２，１０２４となるので，差が１０００をはじめてこえるのは，１１秒後です。