受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

素数の個数と素因数分解・１

１８を素因数分解すると，２×３×３となります。かけ算の式には，２が１個と３が２個現れています。このとき，［１８］＝（２×１）×（３×２）＝１２とします。次の問いに答えなさい。

（１）［３６］，［１０５］をそれぞれ計算しなさい。

（２）［Ａ］＝Ａとなるような，４０以上５０以下の整数Ａをすべて答えなさい。

（３）［Ａ］×２＝Ａとなるような，１００以下の整数Ａをすべて答えなさい。

（４）［Ａ］×９７＝Ａとなるような，整数Ａのうちで，最も小さいものを答えなさい。

素数の個数と素因数分解・１

（１）［３６］＝２４，［１０５］＝１０５　（２）４１，４２，４３，４４，４６，４７

（３）１６，４８，７２，８０　（４）１５０５４４

（１）次のようになります。

３６＝２×２×３×３より，［３６］＝（２×２）×（３×２）＝２４

１０５＝３×５×７より，［１０５］＝（３×１）×（５×１）×（７×１）＝１０５

（２）（１）の［１０５］の計算から，素因数分解をした場合に，それぞれの素数が１個しか現れない場合は，［Ａ］＝Ａとなることがわかります。

また，例えば１２＝２×２×３より［１２］＝（２×２）×（３×１）＝１２となります。このように，素数２については２個現れても２×２のままなので，計算の結果が変わりません。

よって，素因数分解をしたときに２は２個まで，他の素数は１個まで現れる数であれば［Ａ］＝Ａとなります。４０以上５０未満で以上の条件を満たすのは，４１，４２，４３，４４，４６，４７です。

（３）まず，素因数分解をしたときに２だけが現れる整数を考えてみます。

Ａ＝２のとき，$\dfrac{A}{[A]}=\dfrac{2}{2\times1}=1$，

Ａ＝４のとき，$\dfrac{A}{[A]}=\dfrac{2\times2}{2\times2}=1$，

Ａ＝８のとき，$\dfrac{A}{[A]}=\dfrac{2\times2\times2}{2\times3}=\dfrac{4}{3}$，

Ａ＝１６のとき，$\dfrac{A}{[A]}=\dfrac{2\times2\times2\times2}{2\times4}=2$，

Ａ＝３２のとき，$\dfrac{A}{[A]}=\dfrac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times5}=\dfrac{16}{5}$，

このように，素因数分解をしたときに現れる２の個数自体が，２をいくつかかけあわせた数，上の例では２個や４個の場合にのみ，$\dfrac{A}{[A]}$は整数となります。２を８個かけあわせた数である２５６では，

$\dfrac{256}{[256]}=\dfrac{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}{2\times8}=16$となります。これ以降も同様にして，整数となる

$\dfrac{A}{[A]}$は大きくなっていくので，$\dfrac{A}{[A]}=2$となるのはＡが１６のときのみです。

こうして，Ａ＝１６のときに［Ａ］×２＝Ａとなるわけですが，このことと（２）でわかった，３以上の素数が素因数分解において，それぞれ１個までしか現れない場合には［Ａ］＝Ａとなることから，１６×３＝４８，１６×５＝８０も条件を満たします。

次に，Ａを素因数分解したときに２以外のある素数が２個以上現れる場合を考えます。例えばＡ＝３６のとき，$\dfrac{A}{[A]}=\dfrac{2\times2}{2\times2}\times\dfrac{3\times3}{3\times2}=\dfrac{3}{2}$となります。ここで分子に注目をすると，分子に２が現れるのは，素因数の２にあたる部分のみです。よって，計算をした結果として$\dfrac{A}{[A]}$＝２となるためには，素因数分解をしたときに２が現れなければならず，さらに，２が１個現れると$\dfrac{2}{2}$＝１，２個現れると$\dfrac{2\times2}{2\times2}$＝１となることから，$\dfrac{2\times2\times2}{2\times3}=\dfrac{4}{3}$となる３個以上の場合を考えます。分母の３を払う必要があることから，

$$\frac{A}{[A]}=\frac{2\times2\times2}{2\times3}\times\frac{3\times\dots}{3\times\square}\times\cdots$$

となります。この形を満たして計算結果が２となる場合として，まずは

$\dfrac{A}{[A]}=\dfrac{2\times2\times2}{2\times3}\times\dfrac{3\times3}{3\times2}$＝２のときのＡ＝２×２×２×３×３＝７２があります。

これ以外の場合は，３以上の素数が現れる回数を増やすことになるので，１００をこえてしまいます。よって，７２のみが条件を満たします。

以上より，１６，４８，７２，８０が答えとなります。

（４）（３）より，$\dfrac{A}{[A]}=97$となるためには，Ａを素因数分解したときに９７が少なくとも２個現れなければなりません。

$$\frac{A}{[A]}=\cdots\times\frac{97\times97\times\dots}{97\times\square}\times\cdots$$

上の式の形を満たす最小の整数は９７×９７で，このとき，

$\dfrac{97\times97}{[97\times97]}=\dfrac{97\times97}{97\times2}=\dfrac{97}{2}$となります。$\dfrac{97}{2}$を２倍すれば９７となるわけですが，ここで（３）の$\dfrac{16}{[16]}=2$を利用します。素因数分解をしたときに９７×９７は９７だけが現れ，１６は２だけが現れるので，

１６×９７×９７＝１５０５４４について，$\dfrac{150544}{[150544]}=\dfrac{2\times2\times2\times2}{2\times4}\times\dfrac{97\times97}{97\times2}=97$となります。

よって，Ａ＝１５０５４４です。