受験算数の基礎

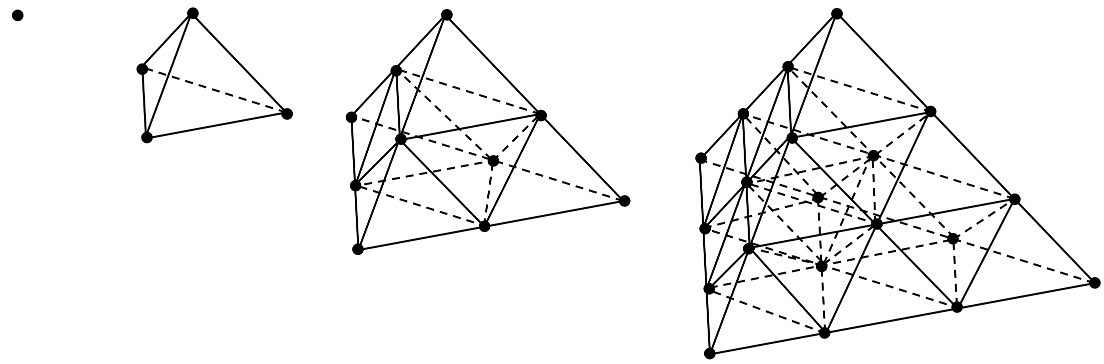
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

三角すい数・三角数・四角数

下の図のように等しい大きさの三角すいを積んでいったときの頂点の個数を三角すい数といいます。
１番目の三角すい数は１，２番目は４，３番目は１０，４番目は２０です。

１番目　　２番目　　３番目　　４番目



（１）８番目の三角すい数を求めなさい。

（２）１０番目の三角すい数と１２番目の三角すい数の差を求めなさい。

（３）□番目の三角すい数と，（□＋６）番目の三角すい数の差が１３３１になりました。□に当てはまる数を答えなさい。

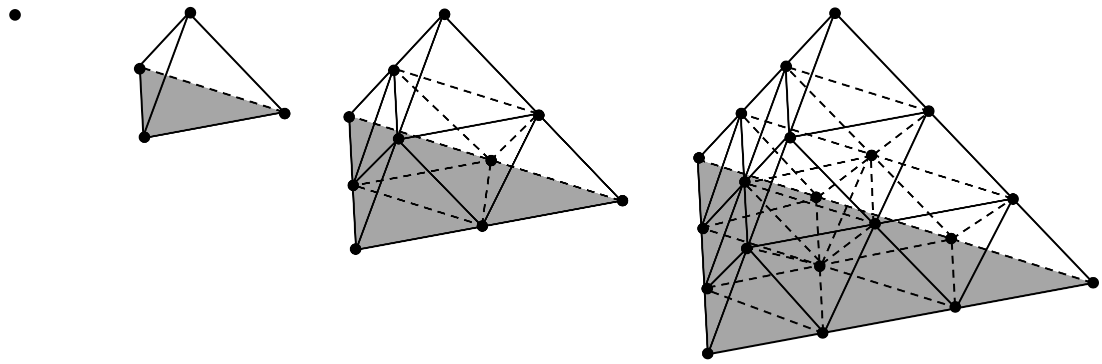
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

三角すい数・三角数・四角数　（１）１２０　（２）１４４　（３）１７

（１）下の図のようにそれぞれの三角すいの底面にあたる正三角形に注目をすると，点の個数は，
１個，１＋２＝３（個），１＋２＋３＝６（個），１＋２＋３＋４＝１０（個）というように三角数になっています。このことから，□番目の三角すい数は，□番目までのすべての三角数の和である，ということができます。



よって，８番目の三角すい数は，１＋３＋６＋１０＋１５＋２１＋２８＋３６＝１２０です。

（２）１１番目の三角数が（１＋１１）×１１÷２＝６６，１２番目の三角数が
（１＋１２）×１２÷２＝７８なので，６６＋７８＝１４４です。

最難関問題

（３）（２）における１４４は１２番目の四角数（平方数）です。となりあう三角数の和は四角数になるので，この場合は１１番目と１２番目の三角数の和が１２番目の四角数になっています。（３）では，
□番目と（□＋２）番目の三角すい数の差が（□＋２）番目の四角数である（□＋２）×（□＋２），
（□＋２）番目と（□＋４）番目の三角すい数の差が（□＋４）×（□＋４），
（□＋４）番目と（□＋６）番目の三角すい数の差が（□＋６）×（□＋６），となります。

次に，四角数と四角数の差について考えます。四角数を小さい順に並べると，
１，４，９，１６，２５，…となりますが，四角数は１，１＋３＝４，１＋３＋５＝９，
１＋３＋５＋７＝１６，１＋３＋５＋７＋９＝２５，…というように，1からはじまる連続する奇数の和に等しいので，となりあう四角数の差は４－１＝３，９－４＝５，１６－９＝7，２５－１６＝9というように2ずつ大きくなる奇数になっています。

よって，（□＋２）×（□＋２）と（□＋３）×（□＋３）の差を☆とすると，
（□＋３）×（□＋３）と（□＋４）×（□＋４）の差は☆＋２，
（□＋４）×（□＋４）と（□＋５）×（□＋５）の差は☆＋４，
（□＋５）×（□＋５）と（□＋６）×（□＋６）の差は☆＋６，
となります。そのため，
（□＋２）×（□＋２）と（□＋４）×（□＋４）の差は☆×２＋２，
（□＋４）×（□＋４）と（□＋６）×（□＋６）の差は☆×２＋１０，となります。
１３３１＝（□＋２）×（□＋２）＋（□＋４）×（□＋４）＋（□＋６）×（□＋６）
であることとあわせると，
１３３１＝（□＋４）×（□＋４）×３－（☆×２＋２）＋（☆×２＋１０）
＝（□＋４）×（□＋４）×３＋８となるので，
（□＋４）×（□＋４）＝（１３３１－８）÷３＝４４１より，
□＋４＝２１，□＝２１－４＝１７です。