受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

三角形と四角形と区域

三角形と四角形をいくつか重ねて，辺に囲まれた部分の個数を数えます。例えば２個の三角形を図１のように重ねると２個，図２のように三角形を２個と四角形を１個重ねると１１個になります。

図１

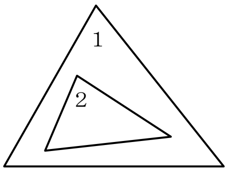
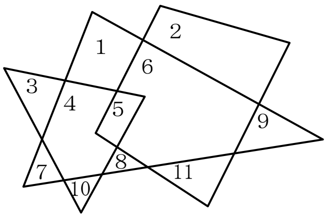


図２



（１）以下の図形を重ねるとき，もっとも多くて何個の部分ができますか。

① 三角形２個

② 三角形１個と四角形１個

③ 四角形２個

（２）以下の図形を重ねるとき，もっとも多くて何個の部分ができますか。

① 三角形１個と四角形２個

② 三角形３個と四角形１個

（３）辺に囲まれた部分がもっとも多くて以下の個数になるような，三角形と四角形の個数の組み合わせとして考えられるものをすべて答えなさい。例えば三角形が３個で四角形が１個の場合は（３，１）と答えなさい。また，そのような組み合わせがないときは「ない」と答えなさい。

① ７２０個

② ７４１個

最難関問題

三角形と四角形と区域

（１）①７個　②７個　③９個　（２）①２１個　②３７個　（３）①ない　②（４，１１），（１１，５）

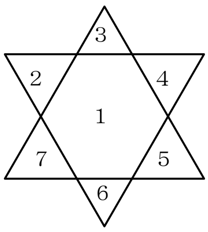
（１）

①　図①のように重ねたときの，７個です。

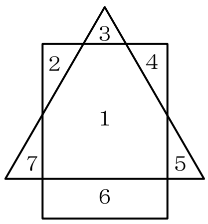
②　図②のように重ねたときの，７個です。

③　図③のように重ねたときの，９個です。

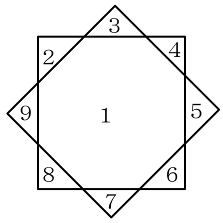
図①



図②

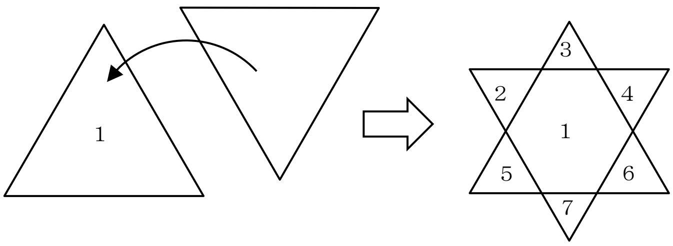


図③



（２）（１）の①を順を追って考えると，図④のようになります。三角形１個の場合，辺に囲まれた部分は１個あります。そこに三角形を重ねると，辺に囲まれた部分は６個増えて１＋６＝７（個）になります。

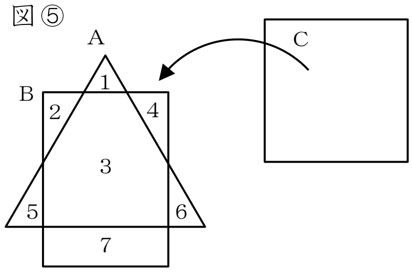
図④



同様に，（１）の②のように三角形と四角形を重ねると辺に囲まれた部分は６個増え，③のように四角形と四角形を重ねると辺に囲まれた部分は８個増えます。このことを利用して考えると，以下のようになります。

①　（１）の②に続けて考えます。図⑤のように，三角形Ａと四角形Ｂを重ねた上に四角形Ｃを重ねると，ＡとＣの間で辺に囲まれた部分が６個増え，ＢとＣの間で辺に囲まれた部分が８個増えるので，７＋６＋８＝２１（個）です。

図⑤



最難関問題

②　三角形３個と四角形１個の場合，三角形と三角形の重なりは，３Ｃ２＝$\frac{3\times2}{2\times1}$＝３（個），三角形と四角形の重なりは，３×１＝３(個)できます。よって辺に囲まれた部分は，６×３＋６×３＝３６(個)増えるので，１＋３６＝３７（個）です。

（３）

①　三角形ｎ個と四角形ｍ個を重ねるとき，三角形と三角形の重なりはｎＣ２個，三角形と四角形の重なりはｎ×ｍ個，四角形と四角形の重なりはｍＣ２個できます。よって，辺に囲まれた部分の個数の最大値は，１＋６×ｎＣ２＋６×ｎ×ｍ＋８×ｍＣ２によって求めることができます。

１＋６×ｎＣ２＋６×ｎ×ｍ＋８×ｍＣ２

$$=1+6\times\frac{n\times(n-1)}{2\times1}+6\times n\times m+8\times\frac{m\times(m-1)}{2\times1}$$

＝１＋３×ｎ×（ｎ－１）＋６×ｎ×ｍ＋４×ｍ×（ｍ－１）

ここで，３×ｎ×（ｎ－１）はｎか（ｎ－１）のいずれかが偶数なので，偶数です。６×ｎ×ｍと４×ｍ×（ｍ－１）も偶数なので，３×ｎ×（ｎ－１）＋６×ｎ×ｍ＋４×ｍ×（ｍ－１）は偶数ですから，それに１を加えることで求まる辺に囲まれた部分は，必ず奇数個になります。よって，辺に囲まれた部分が７２０個になることはありません。

②　７４１は３の倍数です。１＋３×ｎ×（ｎ－１）＋６×ｎ×ｍ＋４×ｍ×（ｍ－１）において，３×ｎ×（ｎ－１）と６×ｎ×ｍは３の倍数ですから，１＋４×ｍ×（ｍ－１）も３の倍数でなければなりません。よって，４×ｍ×（ｍ－１）は＜３の倍数＋２＞です。その場合，ｍも（ｍ－１）も３の倍数ではないので，ｍは＜３の倍数＋２＞，（ｍ－１）は＜３の倍数＋１＞です。ｍが＜３の倍数＋２＞のとき，４×＜３の倍数＋２＞×＜３の倍数＋１＞は，４×２×１＝８が＜３の倍数＋２＞であるため，＜３の倍数＋２＞になって条件を満たします。そのため，ｍが＜３の倍数＋２＞である場合を順に考えていきます。

ｍ＝２のとき

１＋３×ｎ×（ｎ－１）＋６×ｎ×２＋４×２×（２－１）
＝９＋３×ｎ×ｎ－３×ｎ＋１２×ｎ
＝９＋３×ｎ×ｎ＋９×ｎ
＝７４１より，
３×ｎ×ｎ＋９×ｎ＝７４１－９＝７３２，
ｎ×ｎ＋３×ｎ＝ｎ×（ｎ＋３）＝２４４，です。

差が３で積が２４４になる２つの整数をさがすと，１４×１７＝２３８，１５×１８＝２７０より，ないことがわかります。よって，条件を満たすことはありません。

m＝５のとき

１＋３×ｎ×（ｎ－１）＋６×ｎ×５＋４×５×（５－１）
＝８１＋３×ｎ×ｎ－３×ｎ＋３０×ｎ
＝８１＋３×ｎ×ｎ＋２７×ｎ
＝７４１より，
３×ｎ×ｎ＋２７×ｎ＝７４１－８１＝６６０，
ｎ×ｎ＋９×ｎ＝ｎ×（ｎ＋９）＝２２０，です。

差が９で積が２２０になる２つの整数をさがすと，１１×２０＝２２０より，ｎ＝１１のときの（１１，５）が条件を満たします。

m＝８のとき

１＋３×ｎ×（ｎ－１）＋６×ｎ×８＋４×８×（８－１）
＝２２５＋３×ｎ×ｎ－３×ｎ＋４８×ｎ
＝２２５＋３×ｎ×ｎ＋４５×ｎ
＝７４１より，
３×ｎ×ｎ＋４５×ｎ＝７４１－２２５＝５１６，
ｎ×ｎ＋１５×ｎ＝ｎ×（ｎ＋１５）＝１７２，です。

差が１５で積が１７２になる２つの整数をさがすと，７×２２＝１５４，８×２３＝１８４より，ないことがわかります。よって，条件を満たすことはありません。

m＝１１のとき

１＋３×ｎ×（ｎ－１）＋６×ｎ×１１＋４×１１×（１１－１）
＝４４１＋３×ｎ×ｎ－３×ｎ＋６６×ｎ
＝４４１＋３×ｎ×ｎ＋６３×ｎ
＝７４１より，
３×ｎ×ｎ＋６３×ｎ＝７４１－４４１＝３００，
ｎ×ｎ＋２１×ｎ＝ｎ×（ｎ＋２１）＝１００，です。

差が２１で積が１００になる２つの整数をさがすと，４×２５＝１００より，ｎ＝４のときの（４，１１）が条件を満たします。

m＝１４のとき

１＋３×ｎ×（ｎ－１）＋６×ｎ×１４＋４×１４×（１４－１）
＝７２９＋３×ｎ×ｎ－３×ｎ＋８４×ｎ
＝７２９＋３×ｎ×ｎ＋８１×ｎ
＝７４１より，
３×ｎ×ｎ＋８１×ｎ＝７４１－７２９＝１２，
ｎ×ｎ＋２７×ｎ＝ｎ×（ｎ＋２７）＝４，です。

差が２７で積が４になる２つの整数をは明らかにありません。よって，これ以降で条件を満たすことはありません。

以上より，（４，１１），（１１，５）です。