



100...001 型の整数の間の倍数関係

この教材では、 101 、 1001 、 10001 、...のように、一番上の位と一の位の数に1で残りの位に0である $100\cdots001$ 型の整数の間の倍数関係を考えます。 $\boxed{1}\sim\boxed{3}$ は導入の問題です。 $\boxed{4}$ で一般的な説明を求めます。

$\boxed{1}$ 101 の倍数 $100\cdots001$

101 の倍数で、 $100\cdots001$ のように、一番上の位と一の位に1で残りの位に0である整数を考えます。このような数のうちで最も小さいのは 101 です。

(1) 2番目に小さい数を答えなさい。

(2) このような数のうちで、桁数が 100 桁に最も近い数は何桁の整数ですか。

100...001 型の整数の間の倍数関係

2 1001 の倍数 100...001

1001 の倍数で、100...001 のように、一番上の位と一の位の数に 1 で残りの位に 0 である整数を考えます。このような数のうちで最も小さいのは 1001 です。

(1) 2 番目に小さい数を答えなさい。

(2) このような数のうちで、桁数が 100 桁に最も近い数は何桁の整数ですか。

(3) 101 と 1001 の公倍数で、100...001 のように、一番上の位と一の位の数に 1 で残りの位に 0 である整数を求めなさい。

100...001 型の整数の間の倍数関係

③ 1001 と 100001 の公倍数 100...001

1001 と 100001 の公倍数で、100...001 のように、一番上の位と一の位の数で 1 で残りの位の数で 0 である整数を考えます。

(1) このような数のうちで、最も小さい数は何けたの整数ですか。

(2) このような数のうちで、桁数が 1000 桁に最も近い数は何桁の整数ですか。

100...001 型の整数の間の倍数関係

4 100...001 型の整数の間の倍数関係

100...001 は、一番上の位と一の位の数に 1 が間に 0 が $\square$ 個並ぶ、 $\square + 2$ けたの整数です。

100...001 の倍数で、100...001 と同じように一番上の位と一の位の数に 1 が間に 0 だけが並ぶ整数の桁数はどのような式で表すことができるか、理由とともに説明しなさい。説明する際は図などをかいてもかまいません。

100...001 型の整数の間の倍数関係

1 101の倍数100...001 (1) 1000001 (2) 99桁

(1) 次のようになって、 $101 \times 9901 = 1000001$ です。

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 9901 \\ \hline 101 \\ 909 \\ 91001 \\ 909 \\ \hline 1000001 \end{array}$$

(2) (1) で求めた1000001の筆算を続けると、次のようになります。

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 99009901 \\ \hline 101 \\ 909 \\ 91001 \\ 909 \\ \hline 1000001 \\ 909 \\ 910000001 \\ 909 \\ \hline 10000000001 \end{array}$$

以降も同様にして、9900を何回か繰り返して最後に9901で終わる整数を101にかけると、一番上の位と一の位の数に1で残りの位の数に0である整数になります。(1) で求めた101が3桁、1000001が7桁で、以降も間の0が4個ずつ増えるので、 $3 + 4 \times 24 = 99$ (桁) が100桁に最も近くなります。

2 1001の倍数100...001 (1) 1000000001 (2) 100桁 (3) 存在しない

(1) 次のようになって、 $1001 \times 999001 = 1000000001$ です。

$$\begin{array}{r}
 1001 \\
 \times \quad 999001 \\
 \hline
 1001 \\
 9009 \\
 9010001 \\
 9009 \\
 99100001 \\
 9009 \\
 \hline
 1000000001
 \end{array}$$

(2) (1) で求めた1000000001の筆算を続けると、次のようになります。

$$\begin{array}{r}
 1001 \\
 \times \quad 999000999001 \\
 \hline
 1001 \\
 9009 \\
 9010001 \\
 9009 \\
 99100001 \\
 9009 \\
 \hline
 1000000001 \\
 9009 \\
 90100000000001 \\
 9009 \\
 991000000000001 \\
 9009 \\
 \hline
 1000000000000001
 \end{array}$$

以降も同様にして、999000を何回か繰り返して最後に999001で終わる整数を1001にかけると、一番上の位と一の位の数が1で残りの位の数が0である整数になります。(1) で求めた1001が4桁、1000000001が10桁で、以降も間の0が6個ずつ増えるので、 $4 + 6 \times 16 = 100$ (桁) にちょうどなります。

(3) 一番上の位と一の位の数が1で残りの位の数が0である整数について、

101の倍数であるものは $3 + 4 \times \square$ 桁なので桁数は奇数、1001の倍数であるものは $4 + 6 \times \square$ 桁なので桁数は偶数です。よって、両方の条件を満たすことは不可能です。

3 1001と100001の公倍数100...001 (1) 16桁 (2) 1006桁

(1) 100001の倍数で一番上の位と一の位の数で1で残りの位の数で0である整数の2番目は、次のように、 $100001 \times 9999900001 = 10000000000000001$ という16桁の整数になります。

[illegible]

1001の倍数で一番上の位と一の位の数に1で残りの位が0である整数は $4 + 6 \times \square$ 桁なので、16桁が条件を満たす最小です。

(2)(1)の筆算を続けると次のようになります。

$$\begin{array}{r}
 100001 \\
 \times 99999000009999900001 \\
 \hline
 100001 \\
 900009 \\
 900010000001 \\
 900009 \\
 9900100000001 \\
 900009 \\
 99901000000001 \\
 900009 \\
 999910000000001 \\
 900009 \\
 100000000000000001 \\
 900009 \\
 9000100000000000000001 \\
 900009 \\
 99001000000000000000001 \\
 900009 \\
 999010000000000000000001 \\
 900009 \\
 9999100000000000000000001 \\
 900009 \\
 10000000000000000000000001
 \end{array}$$

以降も同様にして、9999900000を何回か繰り返して最後に9999900001で終わる整数を100001にかけると、一番上の位と一の位の数に1で残りの位に0である整数になります。100001が6桁で、以降は間の0が10個ずつ増えていきます。1001の場合は0が6個ずつ増えるので、10と6の最小公倍数より、(1)で求めた16桁の数から、間の0が30個増えるごとに公倍数になります。1000桁に最も近いのは、 $16 + 30 \times 33 = 1006$ (桁) です。

4 100...001型の整数の間の倍数関係

次の筆算から、100...001の倍数で条件を満たす数は、1回目の操作では9を□+1個、0を□個、1を1個上の位から順に並べた数を作ることができる、(□+1)×2桁増えます。2回目以降は前回かけた数の左側に、9を□+1個、0を□+1個上の位から順に並べた数を作ることができる、(□+1)×2桁増えます。

1回目		
		□個 100...001
×	99...9	900...001
	□個 900...00	100...001
	900...00	9
	900...01	000...001
	900...009	
	990...10	000...001
	...中略...	
	99...99	10...00 000...001
	900...00	9
	1000...00	00...00 000...001
	2個	

2回目以降			
	□+1個 99...9	□+1個 900...00	9...
×	左の筆算の続き		
	□+1個 900...00	9	100...001
	900...01	000...00	001
	...中略...		
	99...9	910...00	000...001
	900...0	09	
	1000...0	000...00	000...001
	□+1個		

最初の100...001が□+2桁なので、△を0以上の整数として、□+2+(□+1)×2×△という式で表すことができます。