



## 最難関問題

### フィボナッチ数と割り算の回数

最初の2個の数がどちらも1で、3番目以降は直前の2個の数の和となっているような数列に並ぶ数を、フィボナッチ数といいます。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

例えば、3番目のフィボナッチ数は2、8番目のフィボナッチ数は21です。以下では、フィボナッチ数について、商が整数となる範囲において2で何回割ることができるかを考えます。1は0回、2は1回、8は3回割ることができます。

- (1) 200番目までのフィボナッチ数のうち、2でちょうど3回割ることができる数は何個ありますか。
- (2) 2でちょうど2回割ることができるフィボナッチ数はありません。その理由をかんたんに説明しなさい。

(1)	個
(2)	

## 最難関問題

フィボナッチ数と割り算の回数 (1) 17個 (2) 解説参照

(1) 2でちょうど3回割れるということは、 $2 \times 2 \times 2 = 8$ で割ることはできても、

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ で割ることはできないということですから、16で割ったときの余りが8となるフィボナッチ数の個数を求めます。

フィボナッチ数を16で割ったときの余りは次のように求めます。16より小さいフィボナッチ数については、それがそのまま余りになります。

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$

13の次は、 $(8 + 13) \div 16 = 1$ 余り5より5です。

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 5$

5の次は、 $(13 + 5) \div 16 = 1$ 余り2より2です。

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 5, 2$

このようにして周期性が見つかるまで調べていくと、次のように24個の数からなる周期になります。

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 5, 2, 7, 9, 0, 9, 9, 2, 11, 13, 8, 5,$   
 $13, 2, 15, 1, 0, 1, 1, \dots$

24個の数のうち、2個が8なので、 $200 \div 24 = 8$ 余り8、 $2 \times 8 + 1 = 17$  (個) が答えとなります。

(2) (1) に続けて考えると、16で割ったときの余りが4か12の数は4で割ることはできますが、

16や8で割ることはできません。24個の数からなる周期の中に4や12は現れないので、2でちょうど2回割ることができるフィボナッチ数はない、ということです。また、周期がより短くなることが期待できる、8で割ったときの余りについて調べてみてもよいでしょう。以下に解答例を2通り挙げます。

### 【解答例1】

フィボナッチ数を16で割ったときの余りは、 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 5, 2, 7, 9, 0, 9, 9, 2, 11, 13, 8, 5, 13, 2, 15, 1, 0$ の繰り返しとなる。2でちょうど2回割れる数は16で割ったときの余りが4か12となるが、そのような数はないため。

### 【解答例2】

フィボナッチ数を8で割ったときの余りは、 $1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0$ の繰り返しとなる。2でちょうど2回割れる数は8で割ったときの余りが4となるが、そのような数はないため。