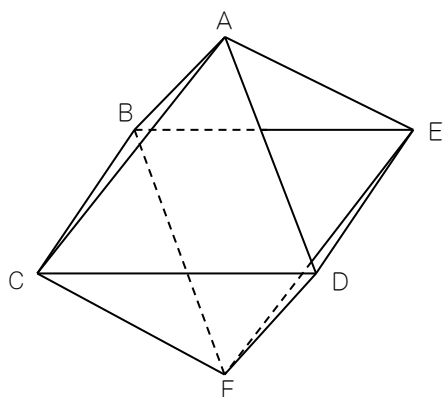


最難関問題

正八面体と水量

下の図のように、1辺3 cmの正八面体（8つの面すべてが正三角形の立体）の形をした容器があり、面ADEは、水を出し入れできるように開いています。この容器を、面BCFを底面にして、床に置きます。容器に水を半分以上入れたところ、水面は2種類の長さの辺に囲まれた図形になり、2種類の辺の長さの差は1.8 cmでした。このとき、次の問いに答えなさい。容器の厚みは考えません。



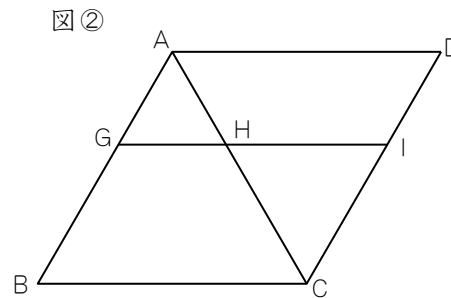
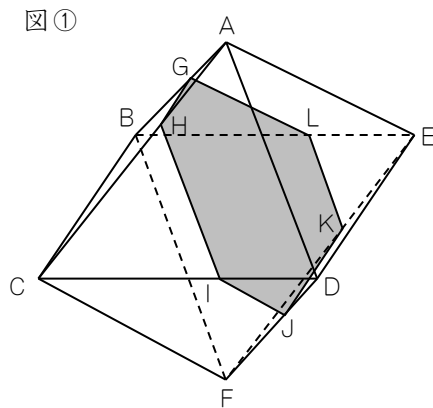
- (1) 水面の2種類の辺の長さは何cmと何cmですか。
- (2) 水面の面積は、1辺の長さが1 cmの正三角形の面積の何倍ですか。
- (3) 容器に入っている水の量は、この容器の容積の何倍ですか。

最難関問題

正八面体と水量

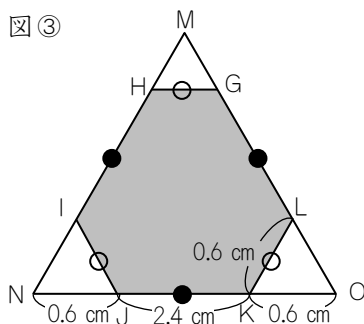
- (1) 0.6 cm, 2.4 cm (2) 1 1.8 8 倍 (3) $\frac{103}{125}$ 倍

(1) 水面は、図①のような六角形 G H I J K L になります。水面は面 B C F および A D E と平行になるので、G H と B C, H I と A D, I J と C F, J K と D E, K L と F B, L G と E A はそれぞれ平行です。また、水面の辺の長さについては、G H = I J = K L, H I = J K = L G が成り立ちます。ここで、面 A B C と A C D を展開図の形で表すと、図②のようになります。



図②において A D, G I, B C は平行なので、G H と H I の長さの和は 3 cm です。また、2 辺の長さの差は 1.8 cm ですから、G H = 0.6 cm, H I = 2.4 cm となります。

(2) G H I J K L は図③のようなすべての内角が 120 度で、辺の長さが 2.4 cm と 0.6 cm の六角形です。1 辺の長さが $2.4 + 0.6 \times 2 = 3.6$ (cm) の正三角形 M N O から、1 辺の長さが 0.6 cm の正三角形を 3 個取り除いた形なので、 $3.6 \times 3.6 - 0.6 \times 0.6 \times 3 = 11.88$ (倍) です。



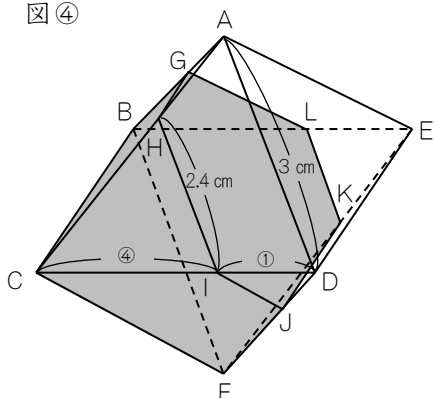
最難関問題

(3) 水は図④のように容器に入っています。水の体積の、容器の容積に対する割合を求めるために、正方形 $BCDE$ より上の部分と下の部分に分けて考えます。

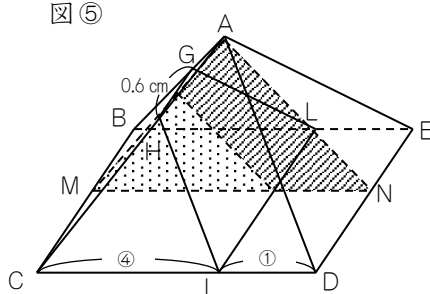
上の部分

辺 BC の中点を M 、 DE の中点を N とすると、水が入っている部分は、図⑤のあみ目の部分を底面積とする切断三角柱 $GBL-HCI$ です。また、容器の上半分も、三角形 ANM を底面とする切断三角柱ととらえることができます。

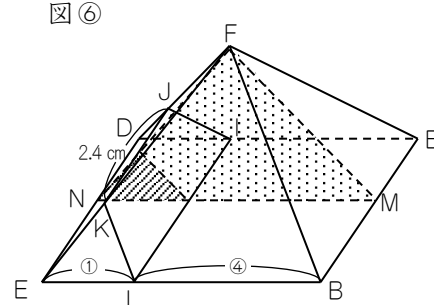
図④



図⑤



図⑥



切断三角柱の体積は、(底面積 $\times$ 高さの平均) で求めることができます。図⑤の場合、底面積の比は $(4 \times 4) : (5 \times 5) = 16 : 25$ 、高さの比は、 $(0.6 + 3 \times 2) : (0 + 3 \times 2) = 11 : 10$ です。よって、体積の比は $(16 \times 11) : (25 \times 10) = 88 : 125$ となります。よって、容器の上半分に入っている水の体積は、容器全体の容積の $\frac{1}{2} \times \frac{88}{125} = \frac{44}{125}$ (倍) です。

下の部分

図⑥において、水が入っていない部分＝空気の部分は、斜線部分の三角形を底面積とする切断三角柱 $JDL-KEL$ です。空気の部分と容器の下半分について、底面積の比は $(1 \times 1) : (5 \times 5) = 1 : 25$ 、高さの比は、 $(2.4 + 3 \times 2) : (0 + 3 \times 2) = 7 : 5$ です。よって、体積の比は $(1 \times 7) : (25 \times 5) = 7 : 125$ となり、水が入っている部分と容器の下半分との体積の比は、 $(125 - 7) : 125 = 118 : 125$ です。よって、容器の下の部分に入っている水の体積は、容器全体の容積の $\frac{1}{2} \times \frac{118}{125} = \frac{59}{125}$ (倍) です。

以上より、容器に入っている水の量は、容器の容積の、 $\frac{44}{125} + \frac{59}{125} = \frac{103}{125}$ (倍) です