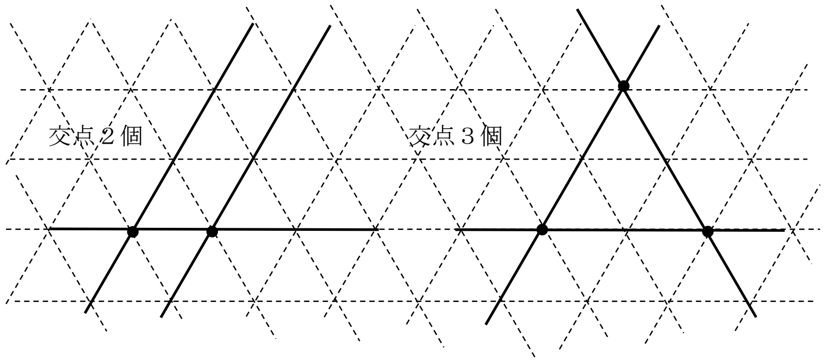
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

正三角形のマス目における交点の数

　等しい大きさの正三角形を並べたマス目があります。正三角形の辺にぴったり重なるように直線を何本か引き，交点の数が最も多くなるようにします。例えば，３本引いた場合は図のようになり，交点の数は最も多くて３個です。



（１）直線を５本引いた場合，交点の数は最も多くて何個ですか。

（２）直線を６本引いた場合，交点の数は最も多くて何個ですか。

（３）直線を１００本引いた場合，交点の数は最も多くて何個ですか。

（４）交点の数が最も多くなるように直線をＮ本ひきました。さらに１本直線を交点が最も多くなるように引いたところ，交点の数は２２２個増えました。Ｎにあてはまる整数をすべて答えなさい。

受験算数の基礎

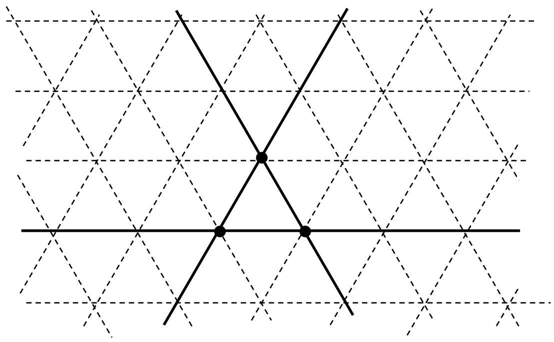
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

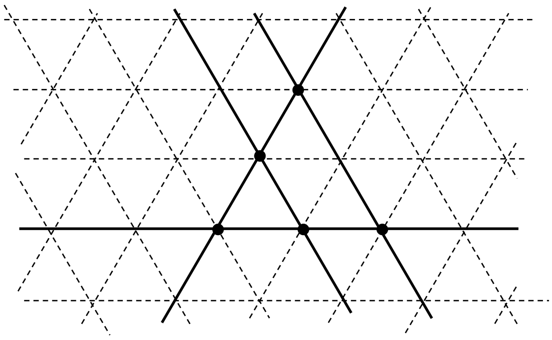
正三角形のマス目における交点の数（１）８個　（２）１２個　（３）３３３３個　（４）３３２，３３３

（１）例えば下図のようになって，８個です。

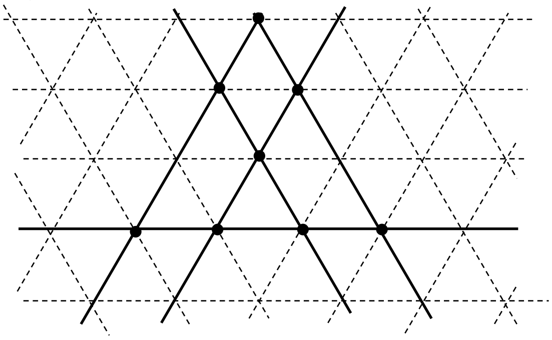
３本



４本

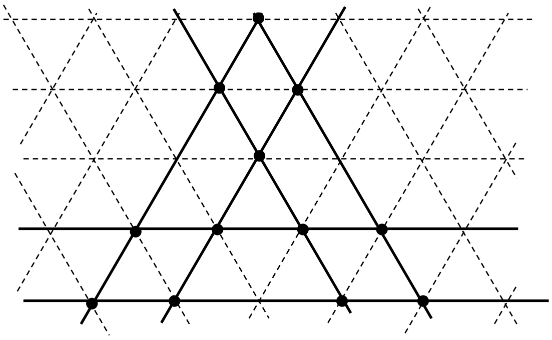


５本



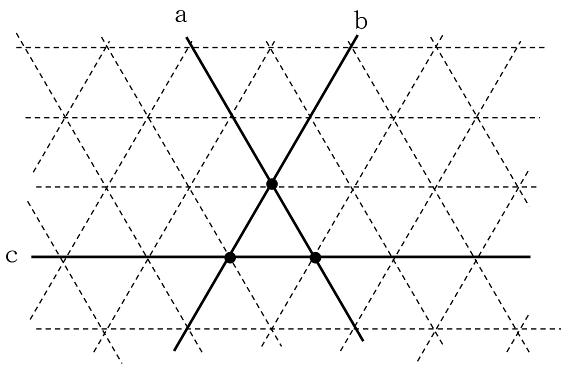
（２）例えば図のようになって，１２個です。

６本



最難関問題

（３）（１）（２）よりわかることは，直線の向きは３種類あり，それぞれの直線の本数をできるだけ等しくすると交点の数が多くなるということです。３種類の向きを，下図のａ，ｂ，ｃと平行な向きとします。



１００÷３＝３３余り１より，１００＝３４＋３３＋３３ですから，ａと平行な直線が３４本，ｂおよびｃと平行な直線がそれぞれ３３本のときの交点の数を考えます。ａと平行な３４本の直線はすべてｂおよびｃと平行な直線と交わるので，交点の数は３４×（３３＋３３）個です。ｂと平行な３３本の直線はすべてａおよびｃと平行な直線と交わるので，交点の数は３３×（３４＋３３）個，ｃと平行な３３本の直線はすべてａおよびｂと平行な直線と交わるので，交点の数は３３×（３４＋３３）個です。
よって，｛３４×（３３＋３３）＋３３×（３４＋３３）＋３３×（３４＋３３）｝÷２
＝３４×３３＋３３×６７＝３３×（３４＋６７）＝３３３３より，３３３３個です。

（４）今度は，交点の増え方を考えます。

直線(本)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	１０	１１	１２	１３	…
ａ(本)	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	…
ｂ(本)	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	…
ｃ(本)	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	…
交点(個)	0	1	3	5	8	１２	１６	２１	２７	３３	４０	４８	５６	…
増え方		1	2	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	…

例えば直線が６本の場合，ａ，ｂ，ｃと平行な直線はそれぞれ３本です。ａを１本増やして直線を７本にすると，交点はすでに引いてあるｂとｃの本数の和である２＋２＝４（個）増えます。このようにして調べていくと，上の表ができあがります。交点の数は，（１個，２個，２個），（３個，４個，４個），…と，規則的に増えていきます。

２２２÷２＝１１１より，（２２１個，２２２個，２２２個）は１１１組目ですから，１＋１１１×３＝３３４（本）および，３３４－１＝３３３（本）直線を引くと交点が２２２個増えます。Ｎ＋１＝３３３，３３４ですから，Ｎ＝３３２，３３３です。