受験算数の基礎

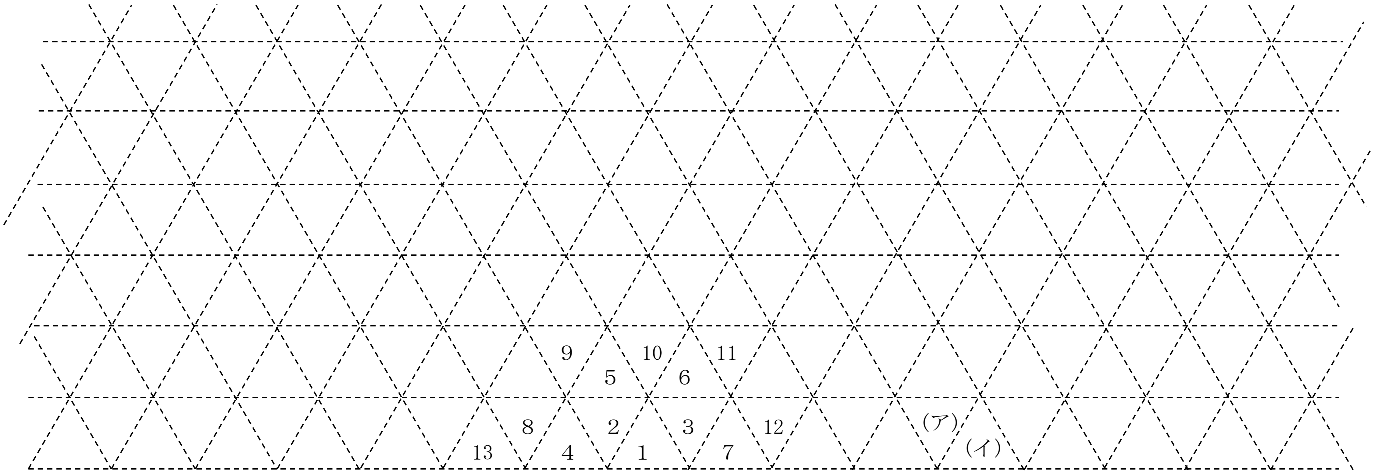
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

正三角形の数表

図１のように正三角形をしきつめたマス目に，ある決まりに従って整数を１から順に書きこんでいきます。マス目はどこまでも広がっていくものとします。

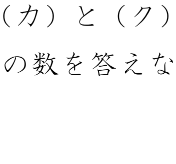
図１



（１）図１の（ア)，（イ）にあてはまる数を答えなさい。

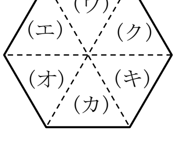
（２）図１のある部分を向きを変えることなく抜き出したところ，図２のようになりました。図２の空いている部分に数字をかきこみなさい。

図２



（３）図１のある部分を向きを変えることなく抜き出したところ，図３のようになり，（ウ）と（オ）の差が９２，（カ）と（ク）の差が９５，となりました。このとき，（カ）にあてはまる整数のうち，最大の数と最小の数を答えなさい。

図３



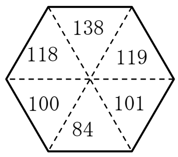
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

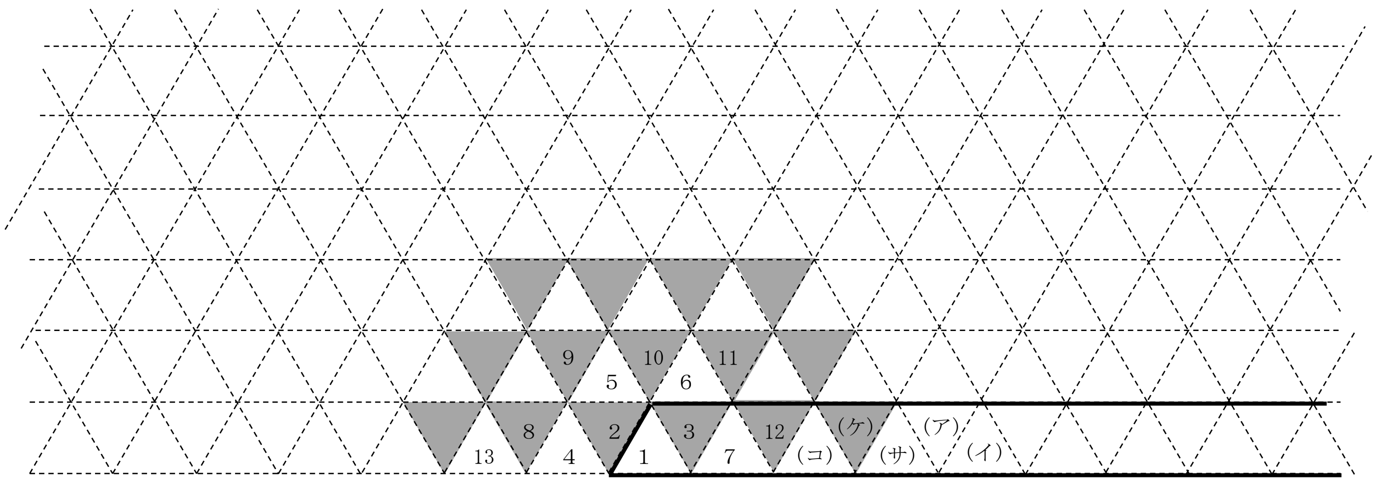
正三角形の数表　（１）（ア）…４８，（イ）…６１　（２）

（３）最大…７２１，最小…７０７



（１）数表の問題ですから，様々な規則性が成り立ちます。例えば，太線で囲まれた部分の三角形に書かれる数字に注目をすると次のようになります。

まず，１と書かれた三角形と辺を接するのは，２個の下向きの三角形ですから，１＋２＝３です。次に，１～３の三角形を組み合わせた図形と辺を接するのは４個の上向きの三角形ですから，３＋４＝７です。同様に調べていくと，上向きの正三角形の個数は１，４，７，１０，…と１から始まり差が３の等差数列になります。また，下向きの正三角形の個数は，２，５，８，１１，…と２から始まり差が３の等差数列になります。



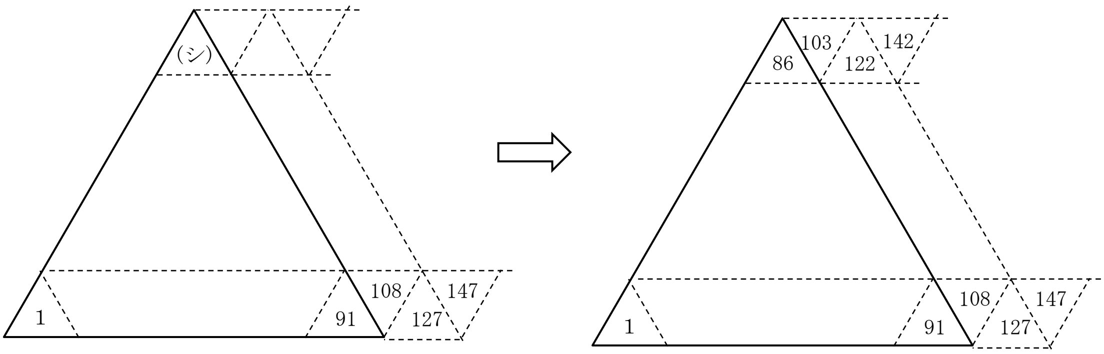
太線で囲まれた部分の下向きの三角形に書かれる数字は，１＋２＝３，３＋４＋５＝１２，１２＋７＋８＝２７より（ケ）は２７，２７＋１０＋１１＝４８より（ア）は４８となります。毎回，たされる２つの数が３ずつ大きくなっていくので，３，１２，２７，４８，…は差が９，１５，２１，…と６ずつ大きくなる階差数列になっています。

同様に，太線で囲まれた部分の上向きの三角形に書かれる数字は，１，１＋２＋４＝７，７＋５＋７＝１９より（コ）は１９，１９＋８＋１０＝３７より（サ）は３７，３７＋１１＋１３＝６１より（イ）は６１となり，１，７，１９，３７，６１，…は差が６，１２，１８，２４，…と６ずつ大きくなる階差数列に，あるいは６×１，６×２，６×３，６×４，…と６の倍数を順に並べた数列になっています。

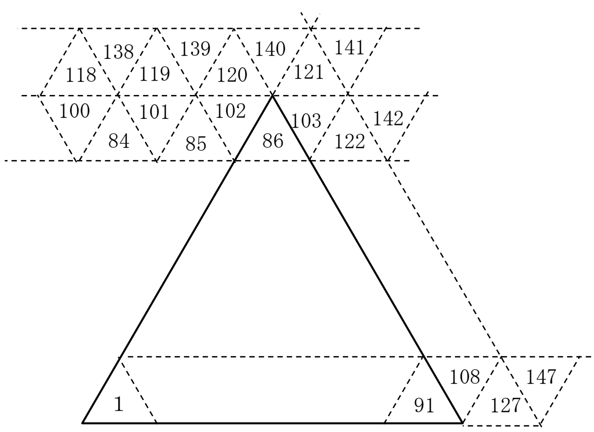
最難関問題

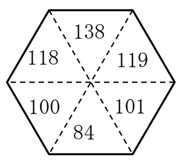
（２）下向きの三角形に１００と書かれているので，（１）の太線に囲まれた下向きの三角形の数列に注目し，１００に近い数を探すと，３，１２，２７，４８，４８＋２７＝７５，７５＋３３＝１０８となります。１０８は３から数えて６番目の数ですから，１０８の両隣りにある上向きの三角形に書かれた数は，１＋６×（１＋２＋３＋４＋５）＝９１，９１＋６×６＝１２７です。また，１０８の次の下向きの三角形に書かれた数は，１０８＋３９＝１４７です。

次に，１０８から１００に戻る手順を考えます。９１は１から数えて６番目の上向きの正三角形であることから，下図のように１辺にマス目の正三角形が６個並ぶ大きな正三角形に注目をすると，（シ）に入る数は９１－（６－１）＝８５です。同様に，１０８，１２７，１４７からも５を引くと，１０３，１２２，１４２となります。



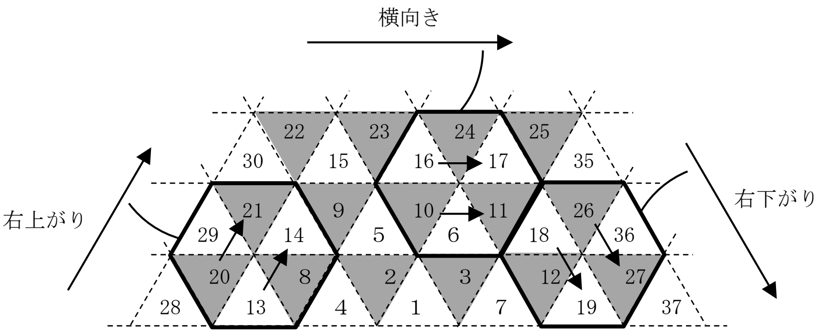
８６の１つ前の数である８５は，８６の左側のマスに書かれるので，１００を含む正六角形は下図のようになります。





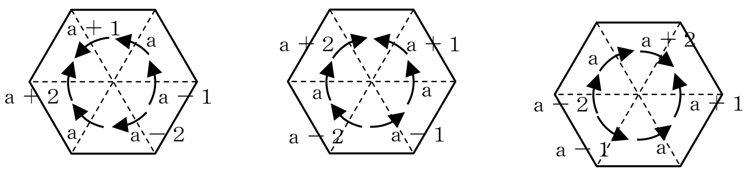
最難関問題

（３）数字を順にたどっていくと，下図のように右上がりに進む場合・横向きに進む場合・右下がりに進む場合の３通りの方向に分けることができます。

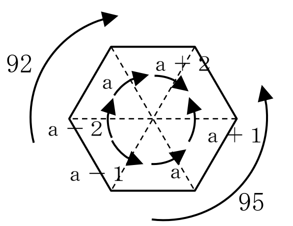


それぞれの方向において，正六角形の中の整数の差は，以下のようになっています。

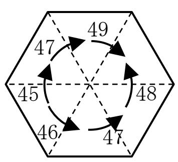
右上がり　　横向き　　右下がり



９５－９２＝３となる条件を満たすのは，右下がりの場合のみです。

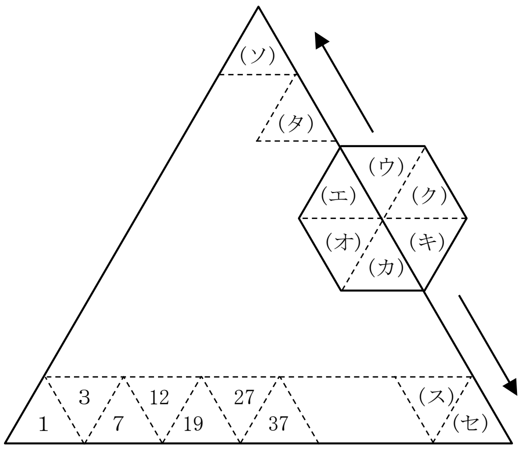


このとき，ａ＋ａ＋１＝９５より，ａ＝（９５－１）÷２＝４７ですから，差は以下のようになります。



最難関問題

正六角形が右下がりの方向であることから，下図の位置にあることがわかります。



（オ）と（カ）の差が４６であることに注目をします。７－３＝４，１９－１２＝７，３７－２７＝１０というように，図の正三角形の一番下の辺において，隣りあう下向きの正三角形と上向きの正三角形に書かれた数字の差は４，７，１０，…という差が３の等差数列になります。（ス）と（セ）の差も４６ですから，（４６－４）÷３＝１４より，３と７の正三角形を１組目とすると，（ス）と（セ）の正三角形は１５組目です。よって，セは１＋６×（１＋２＋３＋…＋１５）＝７２１となります。また，（ソ）は７２１－（１６－１）＝７０６，（タ）は７０６＋１＝７０７です。

（カ）が（ソ）の位置に来ると，正六角形は横向きの正六角形になりますから，（カ）は（タ）～（セ）と重なります。よって，最小は７０７，最大は７２１です。