

最難関問題

2020の問題・1

$\frac{1}{2020}, \frac{2}{2020}, \dots, \frac{2019}{2020}$ の2019個の分数について、以下の問いに答えなさい。

(1) これらの分数を小数にしたとき、小数点以下が無限に続かないものは何個ありますか。

(2) $\frac{1}{2020}$ を小数にしたときの小数第101位にあたる数を答えなさい。

(3) これらの分数を小数にしたとき、途中から^{とちゅう}14851485…と、1485が繰り返されるものは何個ありますか。

最難関問題

2020の問題・1 (1) 19個 (2) 9 (3) 58個

(1) 2020を素因数分解すると、 $2020 = 2 \times 2 \times 5 \times 101$ となります。分母が $2 \times 2 \times 5 = 20$

の分数は小数にしたときに小数点以下が無限に続きません。というのも、 $\frac{\Delta}{20} = \frac{\Delta \times 5}{100}$ となるからで

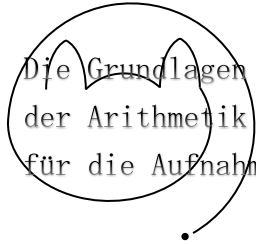
す。他方で、分母が101の分数は $\frac{1}{101} = 0.00990099\cdots$ と $\boxed{0099}$ の繰り返しになるので、
小数点以下が無限に続きます。

$\frac{\Delta}{20} = \frac{\Delta \times 101}{2020}$ より、2019以下の101の倍数の個数を求めて、 $2020 \div 101 = 20$ (個)

から2020を除いて、 $\frac{101}{2020} \sim \frac{1919}{2020}$ の19個です。

(2) $1 \div 2020 = 0.0004950495\cdots$ と小数第3位から $\boxed{0495}$ の繰り返しになるので、

$(101 - 2) \div 4 = 24$ 余り3より、周期の3番目の9です。



最難関問題

(3) 繰り返しになる部分を□で囲うと、

$$\frac{1}{2020} = 0.00\boxed{0495},$$

$$\frac{2}{2020} = 0.00\boxed{0495} \times 2 = 0.00\boxed{0990} \quad (0.0\boxed{0099} \text{と考えてもよい})$$

というように、495の倍数の繰り返しとなります(5けたの倍数が気になるかもしれませんが。それについては次回に扱います。)。 $1485 \div 495 = 3$ より、

$$\frac{3}{2020} = 0.00\boxed{1485}, \quad \frac{30}{2020} = 0.0\boxed{1485}, \quad \frac{300}{2020} = 0.\boxed{1485}, \quad \text{となります。これ}$$

らに(1)で求めた $\frac{\Delta}{20} = \frac{\Delta \times 101}{2020}$ を加えます。

$$\frac{3}{2020} \dots \frac{3}{2020} \text{自身と}, \quad \frac{101}{2020} \sim \frac{1919}{2020} \text{の19個の分数を加えた場合で, 20個です。}$$

$$\frac{30}{2020} \dots \frac{30}{2020} \text{自身と}, \quad \frac{101}{2020} \sim \frac{1919}{2020} \text{の19個の分数を加えた場合で, 20個です。}$$

$$\frac{300}{2020} \dots \frac{300}{2020} \text{自身と}, \quad \frac{101}{2020} \sim \frac{1717}{2020} \text{の17個の分数を加えた場合で, 18個です。}$$

なお、 $30 - 3 = 27$, $300 - 30 = 270$, $300 - 3 = 297$ はいずれも101の倍数ではありませんから、以上に重複はありません。

よって、 $20 \times 2 + 18 = 58$ (個) です。