受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

フィボナッチ数列の問題・２

数を次の手順で左から並べていきます。仮分数はすべて帯分数にします。

①　まず，$\frac{1}{2}$を２つ並べます。　$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$

②　右端に並んだ２つの数の和を次の数とします。　$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1

③　右端に並んだ２つの数の和を次の数とします。　$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1，$1\frac{1}{2}$

④　右端に並んだ２つの数の差を次の数とします。　$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1，$1\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$

⑤　右端に並んだ２つの数の差を次の数とします。　$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1，$1\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1

⑥　以降は，手順②～⑤をくり返します。　$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1，$1\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1，$1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{2}$，1，$1\frac{1}{2}$，…

（１）７２はこの数列の何番目に現れますか。あてはまるものをすべて答えなさい。

（２）分数のみを数えていった場合，３６番目の分数を答えなさい。また，その分数は左から何番目に並んでいますか。

最難関問題

フィボナッチ数列の問題・２（１）３６番目，３９番目，４２番目，４５番目　（２）$188\frac{1}{2}$，５３番目

（１）数の列$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，１，$1\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，１，$1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{2}$，１，$1\frac{1}{2}$，…をすべて分母２の仮分数に変えると，次のようになります。

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{2}$，…

さらに，分子のみを先まで並べ，手順②～⑤で並ぶ４つの数ごとに囲うと，次のようになります。

１，１，$\boxed{2，3，1，2}$，$\boxed{3，5，2，3}$，$\boxed{5，8，3，5}$，$\boxed{8，13，5，8}$，$\boxed{13，\cdots}$，…

周期の最初の数は，２，３，５，８，１３，…と，よくあるフィボナッチ数列になります。

また，分子を最初から順に４つずつ囲うと，次のようになります。

$\boxed{1，1，2，3}$，$\boxed{1，2，3，5}$，$\boxed{2，3，5，8}$，$\boxed{3，5，8，13}$，$\boxed{5，8，13，21}$，…

周期の最初の数は１，１，２，３，５，…とこちらもフィボナッチ数列になります。どちらの周期で解いても同じことですが，最初から周期が始まっているこちらの囲い方で解説します。

３および５の現れ方を確認すると，次のように順に周期の４番目，３番目，２番目，１番目に現れます。

$\boxed{1，1，2，3}$，$\boxed{1，2，3，5}$，$\boxed{2，3，5，8}$，$\boxed{3，5，8，13}$，$\boxed{5，8，13，21}$，…

$72=\frac{144}{2}$より，１４４を１，１から始まるフィボナッチ数列においてさがすと，１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，５５，８９，１４４となります。よって，１４４は最初に３４から始まる周期の４番目に現れるので，数の列の４×９＝３６（番目），次に５５から始まる周期の３番目に現れるので，数の列の４×１０－１＝３９（番目），次に８９から始まる周期の２番目に現れるので，数の列の４×１１－２＝４２（番目），最後に１４４から始まる周期の最初に現れるので，数の列の４×１２－３＝４５（番目）に現れます。

最難関問題

（２）（１）で考えた分母２の仮分数の分子の列１，１，２，３，１，２，３，５，２，３，５，…において，分子が奇数，つまりは２で割って１余る数のときに，分数になります。分子を２で割ったときの余りがどのように変化するのかを考えてみます。最初の２つの数は１，１ですから，余りは１，１です。最初の２つの数の余りを加えると１＋１＝２ですから，３番目の数を２で割ったときの余りは，２÷２＝０となります。４番目の数は１＋０＝１，５番目の数は１－０＝１，６番目の数は１－１＝０，７番目の数は１＋０＝１となります。同様にして続きを求めると，次のようになります。

１，１，０，１，１，０，１，１，０，１，１，０，１，１，０，１，…

このままではよくわかりませんが，和によって余りを求める部分に色を塗ってみると周期が見えてきます。

１，１，０，１，１，０，１，１，０，１，１，０，１，１，０，１，…

１２個の数による周期の中に，１は８個ありますから，３６番目の分数は３６÷８＝４余り４より，１２×４＋５＝５３（番目）です。

分母２の仮分数の分子の列で考えると，５３番目は５３÷４＝１３余り１より，１４組目の最初の数ですから，１，１，２，３，５，…のフィボナッチ数列の１４番目の数です。１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，５５，８９，１４４，２３３，３７７より，１４番目の数は３７７ですから，

$\frac{377}{2}=188\frac{1}{2}$です。