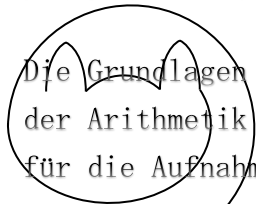


4けたの整数の各位の和（前編）

各位の数の和が1の4けたの整数は1000の1個，2は1011，1101，1110，2000の4個，3は1111，2010，2100，3000の4個，4は1210，1300，2020，2110，2200，3010，3100，4000の8個，5は1320，1410，2030，2120，2210，3020，3110，3200，4010，4100，5000の11個，6は1430，1520，2040，2130，2220，3030，3120，3210，3300，4020，4110，4200，5010，5100，6000の15個，7は1540，1630，2050，2140，2230，3040，3130，3220，3310，3400，4030，4120，4210，4300，4400，5040，5130，5220，5310，5400，6020，6110，6200，7000の21個，8は1650，1740，2060，2150，2240，3050，3140，3230，3320，3410，3500，4040，4130，4220，4310，4400，4500，5050，5140，5230，5320，5410，5500，6030，6120，6210，6300，6400，6500，7010，7100，7200，7300，7400，7500，8000の36個，9は1760，1850，2070，2160，2250，3060，3150，3240，3330，3420，3510，3600，4050，4140，4230，4320，4410，4500，4600，4700，4800，4900，5060，5150，5240，5330，5420，5510，5600，5700，5800，5900，6040，6130，6220，6310，6400，6500，6600，6700，6800，6900，7070，7160，7250，7340，7430，7520，7610，7700，8050，8140，8230，8320，8410，8500，8600，8700，8800，8900，9000の54個あります。

（1）各位の数の和が3，4，34，35である4けたの整数は，それぞれ何個ありますか。

（2）各位の数の和が9，10である4けたの整数は，それぞれ何個ありますか。



4けたの整数の各位の和（前編）

- (1) 和が3...10個, 和が4...20個, 和が34...4個, 和が35...10個
 (2) 和が9...165個, 和が10...219個,

(1) 千の位と, 残りの位に分けて考えます。各位の数の和が3の場合, 千の位は3, 2, 1のいずれかです。千の位が3の場合, 残りの位の数の和は0なので, 000の1通り, 千の位が2の場合, 残りの位の数の和は1なので, 001, 010, 100の3通り, 千の位が1の場合, 残りの位の数の和は2なので, 011, 101, 110, 002, 020, 200の6通りです。このことを, $3-0\cdots 1$, $2-1\cdots 3$, $1-2\cdots 6$ と表すと, 表①のようになって, 個数の合計は $1+3+6=10$ (個) です。各位の数の和が4の場合, $4-0$, $3-1$, $2-2$ については各位の数の和が3の場合と同じで, $1-3$ の場合は, 111 で1通り, 012 の並びかえで6通り, 022 の並びかえで3通りで, あわせて10通り, 個数の合計は $10+10=20$ (個) です。

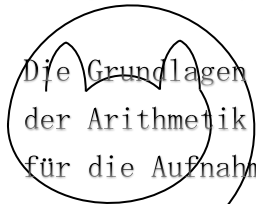
表①

和	1	2	3	4
合計の個数	1	4	10	20
	$1-0\cdots 1$	$2-0\cdots 1$	$3-0\cdots 1$	$4-0\cdots 1$
		$1-1\cdots 3$	$2-1\cdots 3$	$3-1\cdots 3$
			$1-2\cdots 6$	$2-2\cdots 6$
				$1-3\cdots 10$

各位の数の和が35, 34, ついでに33の場合は, 表②のように表1と全く同じ構造になって, 35では4個, 34では10個, 33では20個です。

表②

和	36	35	34	33
合計の個数	1	4	10	20
	$9-27\cdots 1$	$8-27\cdots 1$	$7-27\cdots 1$	$6-27\cdots 1$
		$8-26\cdots 3$	$7-26\cdots 3$	$5-26\cdots 3$
			$7-25\cdots 6$	$4-25\cdots 6$
				$3-24\cdots 10$



(2) 表①, ②に現れる 1, 3, 6, 10 は三角数, 1, 4, 10, 20 は三角数の和である「三角すい数」です。三角数になる理由を, 1-3 の場合で考えてみます。1 1 1 や 0 3 0 や 1 0 2 のように和が 3 になる 3 つの数の並びは, 玉が 3 個並んだ ○○○ の間に区切りを 2 つ入れることと同じです。

1 1 1 ... ○/○/○, 0 3 0 ... /○○○/, 1 0 2 ... ○//○○

ここで, 区切りの入れ方を考えると, 3 個の玉の間と両側で / を入れる場所は 4 か所あるので, そこから 2 か所を選ぶと $4 \times 3 \div 2 = 6$ (通り), 2 つの / を同じ場所に入れる場合が 4 通りあります。

$4 \times 3 \div 2 + 4 = 3 \times 4 \div 2 + 4 = 3 \times (1 + 3) \div 2 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$ となるので, 明らかに三角数になります。このことを利用して各位の数の和が 10 の場合までを増え方のみでまとめていくと, 表③のようになります。

表③

和	1	2	3	4	5	6
合計の個数	1	4	10	20	35	56
	1 - 0 ... 1	1 - 1 ... 3	1 - 2 ... 6	1 - 3 ... 10	1 - 4 ... 15	1 - 5 ... 21

和	7	8	9	10
合計の個数	84	120	165	
	1 - 6 ... 28	1 - 7 ... 36	1 - 8 ... 45	1 - 9 ... 55

よって, 各位の数の和が 9 である 4 けたの整数は 165 個あります。各位の数の和が 10 の場合は, $10 - 0$ の 1 通りが作れないので, $165 + 55 - 1 = 219$ (個) です。