最難関問題

連続する整数の和

１５２個の連続する整数の和を求めたところ，千の位が５，十の位が１，一の位が６になりました。

（１）連続する整数の最初の数として考えられるもののうち，最も小さいものを答えなさい。

（２）連続する整数の最初の数として考えられるもののうち，小さいほうから３番目のものを答えなさい。

（３）連続する整数の最初の数として考えられるもののうち,小さいほうから３３番目のものを答えなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

連続する整数の和　（１）９５　（２）６２０　（３）８１２０

（１）１５２個の連続する整数の最初の数をｎとすると，最後の数はｎ＋１５１ですから，１５２個の整数の和は，（ｎ＋ｎ＋１５１）×１５２÷２＝（ｎ×２＋１５１）×７６となって，７６の奇数倍です。□…□５□１６＝□…□０□００＋５０１６であり，５０１６÷７６＝６６となることから，５０１６は７６の偶数倍ですから，□…□０□００は７６の奇数倍です。

$$\underbrace{\square\cdots\square 5\square 16}_{76\text{の奇数倍}} = \underbrace{\square\cdots\square 0\square 00}_{76\text{の奇数倍}} + \underbrace{5016}_{76\text{の偶数倍}}$$

また，□…□０□００は１００の倍数ですから，７６と１００の最小公倍数である１９００の倍数です。１９００は７６×２５なので７６の奇数倍ですから，□…□０□００は１９００の奇数倍でなければいけません。ここで，１９００と□…□０□００の下２桁の００を外して考えると，１９の奇数倍で，□…□０□という十の位が０の整数を考えればよいことになります。

十の位が０である最小の１９の倍数は，１９×１１＝２０９です。このとき，
□…□０□００＝２０９００＝７６×２５×１１ですから，
２５９１６＝７６×２５×１１＋７６×６６＝７６×３４１＝（ｎ×２＋１５１）×７６より，
ｎ＝９５です。

（２）以降は同様にして，１９の奇数倍で十の位が０となるものを探していくことになります。

１９×５＝９５がだいたい１００であることを利用して，２０９に９５を順に加えていき，ずれが広がったら１９を加える，という手順で探していくと，次のようになります。

						+19					+19
	209	304	399	494	589	608	703	798	893	988	1007
19×	11	16	21	26	31	32	37	42	47	52	53

１９の奇数倍で十の位が０となる３番目の数は１９×５３＝１００７です。よって，
７６×２５×５３＋７６×６６＝７６×１３９１＝（ｎ×２＋１５１）×７６より，
ｎ＝６２０です。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

（３）（２）の手順を続けると，次のようになります。１９×１００＝１９００で下２桁が００となるので，
以降は同じことのくり返しになります。

						+19					+19					+19
	209	304	399	494	589	608	703	798	893	988	1007	1102	1197	1292	1387	1406
19×	11	16	21	26	31	32	37	42	47	52	53	58	63	68	73	74

					+19	
	1501	1596	1691	1786	1805	1900
19×	79	84	89	94	95	100

上の周期中に条件を満たす整数は５個含まれるので，３３÷５＝６余り５より，
１９×（５３＋１００×６）＝１９×６５３が３３番目です。よって，
７６×２５×６５３＋７６×６６＝７６×１６３９１＝（ｎ×２＋１５１）×７６より，
ｎ＝８１２０です。