

最難関問題

連続する整数の和

152個の連続する整数の和を求めたところ、千の位が5、十の位が1、一の位が6になりました。

- (1) 連続する整数の最初の数として考えられるもののうち、最も小さいものを答えなさい。
- (2) 連続する整数の最初の数として考えられるもののうち、小さいほうから3番目のものを答えなさい。
- (3) 連続する整数の最初の数として考えられるもののうち、小さいほうから33番目のものを答えなさい。



最難関問題

連続する整数の和 (1) 95 (2) 620 (3) 8120

(1) 152個の連続する整数の最初の数を n とすると、最後の数は $n + 151$ ですから、152個の整数の和は、 $(n + n + 151) \times 152 \div 2 = (n \times 2 + 151) \times 76$ となって、76の奇数倍です。
 $\square \cdots \square 5 \square 16 = \square \cdots \square 0 \square 00 + 5016$ であり、 $5016 \div 76 = 66$ となることから、5016は76の偶数倍ですから、 $\square \cdots \square 0 \square 00$ は76の奇数倍です。

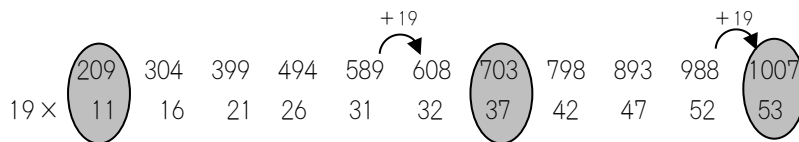
$$\underbrace{\square \cdots \square 5 \square 16}_{76 \text{ の奇数倍}} = \underbrace{\square \cdots \square 0 \square 00}_{76 \text{ の奇数倍}} + \underbrace{5016}_{76 \text{ の偶数倍}}$$

また、 $\square \cdots \square 0 \square 00$ は100の倍数ですから、76と100の最小公倍数である1900の倍数です。1900は 76×25 なので76の奇数倍ですから、 $\square \cdots \square 0 \square 00$ は1900の奇数倍でなければいけません。ここで、1900と $\square \cdots \square 0 \square 00$ の下2桁の00を外して考えると、19の奇数倍で、 $\square \cdots \square 0 \square$ という十の位が0の整数を考えればよいことになります。

十の位が0である最小の19の倍数は、 $19 \times 11 = 209$ です。このとき、 $\square \cdots \square 0 \square 00 = 20900 = 76 \times 25 \times 11$ ですから、 $25916 = 76 \times 25 \times 11 + 76 \times 66 = 76 \times 341 = (n \times 2 + 151) \times 76$ より、 $n = 95$ です。

(2) 以降は同様にして、19の奇数倍で十の位が0となるものを探していくことになります。

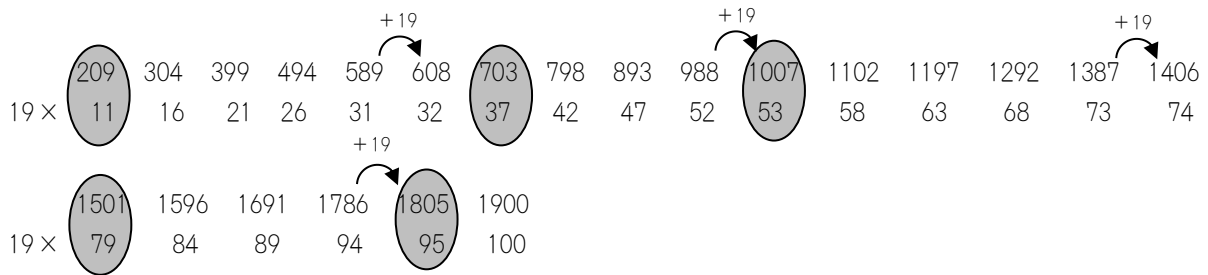
$19 \times 5 = 95$ がだいたい100であることを利用して、209に95を順に加えていき、ずれが広がったら19を加える、という手順で探していくと、次のようになります。



19の奇数倍で十の位が0となる3番目の数は $19 \times 53 = 1007$ です。よって、 $76 \times 25 \times 53 + 76 \times 66 = 76 \times 1391 = (n \times 2 + 151) \times 76$ より、 $n = 620$ です。

最難関問題

(3)(2)の手順を続けると、次のようになります。 $19 \times 100 = 1900$ で下2桁が00となるので、以降は同じことのくり返しになります。



上の周期中に条件を満たす整数は5個含まれるので、 $33 \div 5 = 6$ 余り5より、
 $19 \times (53 + 100 \times 6) = 19 \times 653$ が33番目です。よって、
 $76 \times 25 \times 653 + 76 \times 66 = 76 \times 16391 = (n \times 2 + 151) \times 76$ より、
 $n = 8120$ です。