

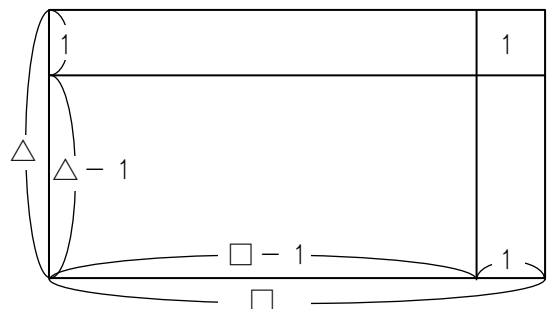
切手の問題と2026

2種類の額面の切手を組みあわせて、いろいろな金額を作ります。切手の額面は、円の単位で整数（つまり、1円、2円、3円、…）です。4円と7円の場合、下の表のように金額を並べると、○をつけた金額に4円を加えることでより先の金額はすべて作ることができるので、1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17円以外の金額はすべて作ることができます。

(表)

1, 5, 9, 13, 17, <u>21</u> , 25, 29, ...
2, 6, 10, <u>14</u> , 18, 22, 26, 30, ...
3, <u>7</u> , 11, 15, 19, 23, 27, 31, ...
<u>4</u> , 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...

4円切手と7円切手では、作ることができない最大の金額は17円でした。ところが、作ることができない最大の金額が2026円であるような2種類の切手の組み合わせは存在しません。その理由を簡単に説明しなさい。必要であれば、右の面積図を参考にしなさい。

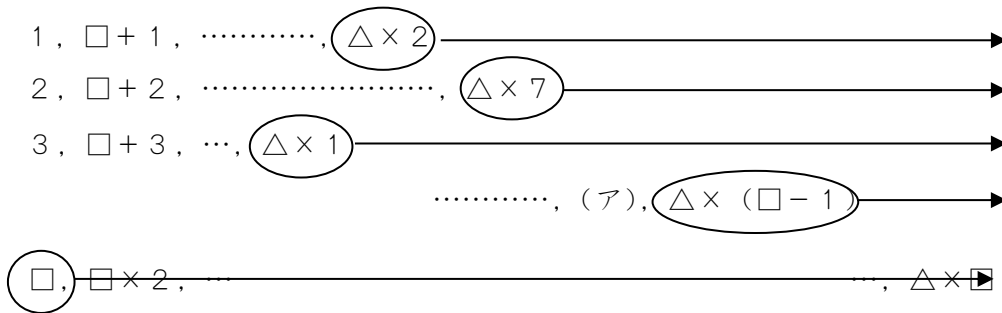


切手の問題と2026

「 $\square$ 円と $\triangle$ 円の切手で作れない最大の金額は $(\square - 1) \times (\triangle - 1) - 1$ で、これが2026なら $(\square - 1) \times (\triangle - 1) = 2027$ だが、2027は素数なので $\square$ と $\triangle$ は2と2028になってしまい、奇数の金額がすべて作れなくなるから」(解答例)

2種類の切手を $\square$ 円、 $\triangle$ 円とすると、作ることができない最大の金額が存在するためには、 $\square$ と $\triangle$ は互いに素でなければなりません。というのも、例えばどちらも3の倍数であれば、その組み合わせでできる金額はすべて3の倍数になるからです。

$\square$ と $\triangle$ が互いに素の場合、その最小公倍数は $\square \times \triangle$ であり、 $\triangle \times 1, \triangle \times 2, \dots, \triangle \times (\square - 1)$ は $\square$ の倍数ではなく、かつ、 $\square$ で割ったときの余りがそれぞれ異なります。よって、下の表のようになり、作ることができない最大の数は(ア)の位置の数です。(ア)の位置の数は、 $\triangle \times (\square - 1) - \square = \triangle \times \square - \triangle - \square$ です。



よって、 $\triangle \times \square - \triangle - \square = 2026$ となるような $\square$ と $\triangle$ の組が存在しないことを示せばよいことになります。ここで問題中に掲げた面積図を参考にすると、 $\triangle \times \square - \triangle - \square = (\triangle - 1) \times (\square - 1) - 1$ であることがわかります。

$(\triangle - 1) \times (\square - 1) - 1 = 2026$ から、
 $(\triangle - 1) \times (\square - 1) = 2027$ です。

2027を素因数分解すると、 $2025 = 45 \times 45$ であることから、少し大きい47までのどの素数で割ってみても割り切れないので、2027は素数とわかります。よって、 $(\triangle - 1) \times (\square - 1) = 2027$ となるためには、 $(\triangle - 1) \times (\square - 1) = 2027 \times 1$ でなければならないので、 $\triangle = 2028$ 、 $\square = 2$ となります。これは、 $\square$ と $\triangle$ が互いに素でなければならないという条件に反するので、成立しません。よって、作ることができない最大の金額が2026円である2種類の切手の組み合わせは存在しません。

