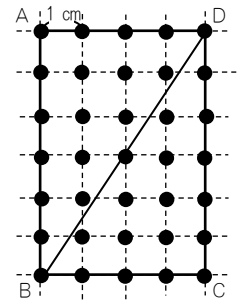


最難関問題

レーザー光線と点の数

右の図のように、1辺が1 cmの小正方形を敷きつめた方眼にそって、辺ADより辺ABの方が長い長方形ABCDを作り、対角線BDを引きます。



(1) $AB = 18$ cm, $AD = 15$ cmのとき、対角線BDは何個の小正方形を通過しますか。また、三角形BCDの辺および内部にふくまれる小正方形の頂点の数は何個ですか。

(2) 対角線BDが42個の小正方形を通過し、三角形BCDの辺および内部にふくまれる小正方形の頂点が323個のとき、辺ABとADの長さは何cmですか。



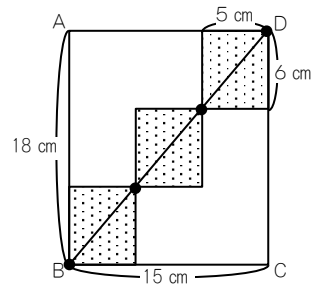
最難関問題

レーザー光線と点の数

(1) 小正方形…30個, 頂点…154個 (2) $AB = 28\text{ cm}$, $AD = 21\text{ cm}$

(1) 18と15の最大公約数は3で, $18 \div 3 = 6$, $15 \div 3 = 5$ なので, 図①のように対角線BDはたて6cm・横5cmの長方形の対角線を3本つなげた線になっています。このとき, 対角線BDが通過する小正方形の個数は, $(5 + 6 - 1) \times 3 = 30$ (個)です。

図①



また, 長方形ABCD全体では, 小正方形の頂点は,
 $(18 + 1) \times (15 + 1) = 304$ (個)あり, 対角線BD上には図①のように頂点が4個あるので, 三角形BCDの辺および内部にふくまれる小正方形の頂点の数は, $(304 + 4) \div 2 = 154$ (個)です。

(2) (1) では対角線BD上に頂点が4個ありましたが, これは図①からわかるように, 最大公約数+1によって求めることができます。よって, 長方形ABCDにおいて $AB = x\text{ cm}$, $AD = y\text{ cm}$ のとき, 三角形BCDの辺および内部にふくまれる小正方形の頂点の数は,

$(x + 1) \times (y + 1) + (x \text{ と } y \text{ の最大公約数} + 1)$ によって求められます。今回は,

$(x + 1) \times (y + 1) + (x \text{ と } y \text{ の最大公約数} + 1) = 323$ より,

$(x + 1) \times (y + 1) + (x \text{ と } y \text{ の最大公約数} + 1) = 646$,

$(x + 1) \times (y + 1) = 646 - (x \text{ と } y \text{ の最大公約数} + 1)$, です。また, 対角線BDが42個の小正方形を通過するということから, x と y の最大公約数は42の約数です。

x と y の最大公約数が1

$(x + 1) \times (y + 1) = 646 - (1 + 1) = 644 = 2 \times 2 \times 161$ です。ここで x と y が互いに素で, $x + y - 1 = 42$ となるような組み合わせは明らかにありません。

x と y の最大公約数が2

$(x + 1) \times (y + 1) = 646 - (2 + 1) = 643$ で, 643は素数ですから, 条件を満たす x と y の組み合わせはありません。

x と y の最大公約数が3

$(x + 1) \times (y + 1) = 646 - (3 + 1) = 642 = 2 \times 3 \times 107$ です。ここで x と y が3の倍数とすると, $(x + 1) \times (y + 1)$ は3の倍数ではありえないので, 条件を満たす x と y の組み合わせはありません。

最難関問題

x と y の最大公約数が6

$(x+1) \times (y+1) = 646 - (6+1) = 639 = 3 \times 3 \times 71$ です。ここで x と y が6の倍数とすると、 $(x+1) \times (y+1)$ は3の倍数ではありえないので、条件を満たす x と y の組み合わせはありません。

x と y の最大公約数が7

$(x+1) \times (y+1) = 646 - (7+1) = 638 = 2 \times 11 \times 29$ です。 $x+1 = 29$, $y+1 = 22$ とすると、 $x = 28$, $y = 21$ なので、 x と y の最大公約数は7です。また、 $28 \div 7 = 4$, $21 \div 7 = 3$ で、 $(4+3-1) \times 7 = 42$ となって条件を満たします。

x と y の最大公約数が14

$(x+1) \times (y+1) = 646 - (14+1) = 631$ で、631は素数ですから、条件を満たす x と y の組み合わせはありません。

x と y の最大公約数が21

$(x+1) \times (y+1) = 646 - (21+1) = 624 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 13$ です。ここで x と y が21の倍数とすると、 $(x+1) \times (y+1)$ は3の倍数ではありえないので、条件を満たす x と y の組み合わせはありません。

x と y の最大公約数が42

$(x+1) \times (y+1) = 646 - (42+1) = 603 = 3 \times 3 \times 67$ です。ここで x と y が42の倍数とすると、 $(x+1) \times (y+1)$ は3の倍数ではありえないので、条件を満たす x と y の組み合わせはありません。

以上より、 $AB = 28 \text{ cm}$, $AD = 21 \text{ cm}$ です。