受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

真分数である既約分数の個数・１

分子が分母より小さい整数である分数を真分数といいます。分母が６の分数のうち，真分数である既約分数は，$\dfrac{1}{6}$と$\dfrac{5}{6}$の２個あります。

（１）

① 分母が４２の真分数である既約分数は何個ありますか。

② 分母が２１０の真分数である既約分数は何個ありますか。

③ 分母が２９４の真分数である既約分数は何個ありますか。

（２）分母が$\boxed{}$の真分数である既約分数は６個あります。$\boxed{}$にあてはまる数をすべて答えなさい。

（３）分母が$\boxed{}$の真分数である既約分数は２４個あります。$\boxed{}$にあてはまる数をすべて答えなさい。

最難関問題

真分数である既約分数の個数・１

（１）①　１２個　②　４８個　③　８４個　（２）７，９，１４，１８

（３）３５，３９，４５，５２，５６，７０，７２，７８，８４，９０

（１）

①　素因数分解をすると４２＝２×３×７ですから，分子は２，３，７の倍数ではない４２未満の整数です。具体的には，１，５，１１，１３，１７，１９，２３，２５，２９，３１，３７，４１の１２個があります。よって，分母が４２の真分数である既約分数は１２個あります。

②　素因数分解をすると２１０＝２×３×５×７です。ここで，新たに素因数に加わった５のことをいったん忘れると，既約分数の分子の候補は，次のように１２個の整数の周期的な並びが５回くり返されるので，１２×５＝６０（個）です。

　　１，５，１１，１３，１７，１９，２３，２５，２９，３１，３７，４１

＋４２

４３，４７，５３，５５，５９，６１，６５，６７，７１，７３，７９，８３

＋４２

…

　ここから，５の倍数を除きます。２１０＝５×４２ですから，５×１～５×４２という５の倍数のうち，５×□の□に入る部分の数が２，３，７の倍数でない数が，上で考えた分子の候補に含まれています。□にあてはまる数は，実は①で既に求めている１２個の整数に他なりません。

　よって，６０－１２＝４８（個）です。

③　素因数分解をすると２９４＝２×３×７×７ですから，①の４２と比べると，素因数は２，３，７のまま変わりません。よって，②で考えた１２個の整数の周期的な並びが７回くり返されるだけです。そのため，１２×７＝８４（個）です。

最難関問題

（２）順を追って調べていくと，分母が７や９の場合に真分数である既約分数が６個であることはすぐにわかります。しかし，すべて答えるとなると，どこまで探していけばよいのかがわかりません。よって，（１）をどう活かすのかを考えます。（１）の③では，分母が４２の真分数である既約分数が１２個であるのに対し，４２の素因数でもある素数７をかけてきでる２９４が分母の，真分数である既約分数は，１２×７＝８４（個）ありました。

それに対して，（１）の②では，１２×５＝６０（個）の候補のうち，１２個が5の倍数なので，１２×（５－１）＝４８（個）となりました。以上から，次のことが成り立ちます。

整数Ａが分母となっている真分数である既約分数がＮ個あるとき， 素数ＭがＡの素因数であるのなら，分母がＡ×Ｍの真分数である既約分数の個数はＮ×Ｍ個， 素数ＭがＡの素因数でないのなら，分母がＡ×Ｍの真分数である既約分数の個数はＮ×（Ｍ－１）個

整数Ａ自身も素数の積ですから，分母を素因数分解した形で考えます。素数２の個数に注目をして場合分けると，次のようになります。

○２×２×（他の素数をいくつか）の場合

分母が２だと真分数である既約分数は１個なので，分母が２×２だと１×２＝２（個）です。３をかけて分母を２×２×３とすると，２×（３－１）＝４（個）となり，４は６の約数ではないのでここから先はうまくいきません。また，５をかけて分母を２×２×５とすると，２×（５－１）＝８（個）となり，大きくなりすぎてしまいます。

このように，真分数である既約分数が６個となる分母は得られません。

○２×（他の素数をいくつか）の場合

分母が２だと真分数である既約分数は１個なので，分母が２×３だと１×（３－１）＝２（個）です。ここで３をかけて分母を２×３×３とすると，２×３＝６（個）となります。よって，分母が２×３×３＝１８の場合，条件を満たします。

次に，分母が２×５だと１×（５－１）＝４（個）となってうまくいきません。分母が２×７の場合は，１×（７－１）＝６（個）となります。よって，分母が２×７＝１４の場合も条件を満たします。

○２以外の素数の積の場合

分母が３だと真分数である既約分数は２個なので，分母が３×３だと２×３＝６（個）となります。よって，分母が３×３＝９の場合，条件を満たします。分母が５だと真分数である既約分数は４個なのでうまくいきません。分母が７だと真分数である既約分数は６個なので条件を満たします。これ以降は，個数が６より大きくなってしまいます。

以上より，７，９，１４，１８です。

最難関問題

（３）仕組みはすでに分かったので，（２）と同様に場合分けをして調べていってもよいのですが，（２）の答えが７か９の倍数である点に注意をしてもよいかもしれません。６は３の倍数です。（２）で見た仕組みにおいて，真分数である既約分数が３の倍数になるためには，７や１３のように，１を引くと３の倍数になる素因数を含む整数が分母であるか，素因数として３を２個以上含むことによって，□×（３－１）×３という計算が成り立つことが必要です。

２４も３の倍数ですから，真分数である既約分数が２４個となるためには，

・素因数として３を２個含む…３個以上含むと，（３－１）×３×３×…となって，９の倍数になってしまいます。

・素因数として７を含む

・素因数として１３を含む

のいずれかが必要です。なお，２５は素数ではないので，２５－１＝２４によって２４個にはなりません。

以上に基づいて場合分けをすると，次のようになります。

○３×３×（他の素数をいくつか）の場合

分母が３×３だと真分数である既約分数は（３－１）×３＝６（個）です。さらに４倍すれば２４個になるので，次の場合に条件を満たします。

・分母が３×３×２×２×２＝７２のときに６×（２－１）×２×２＝２４（個），

・分母が３×３×２×５＝９０のときに６×（２－１）×（５－１）＝２４（個），

・分母が３×３×５＝４５のときに６×（５－１）＝２４（個）

○７×（他の素数をいくつか）の場合

分母が７だと真分数である既約分数は６個です。さらに４倍すれば２４個になるので，次の場合に条件を満たします。

・分母が７×２×２×２＝５６のときに６×（２－１）×２×２＝２４（個），

・分母が７×２×２×３＝８４のときに６×（２－１）×２×（３－１）＝２４（個），

・分母が７×２×５＝７０のときに６×（２－１）×（５－１）＝２４（個），

・分母が７×５＝３５のときに６×（５－１）＝２４（個）

○１３×（他の素数をいくつか）の場合

分母が１３だと真分数である既約分数は１２個です。さらに２倍すれば２４個になるので，次の場合に条件を満たします。

・分母が１３×２×２＝５２のときに１２×（２－１）×２＝２４（個），

・分母が１３×２×３＝７８のときに１２×（２－１）×（３－１）＝２４（個），

・分母が１３×３＝３９のときに１２×（３－１）＝２４（個）

よって，３５，３９，４５，５２，５６，７０，７２，７８，８４，９０です。