

## 最難関問題

真分数である既約分数の個数・1

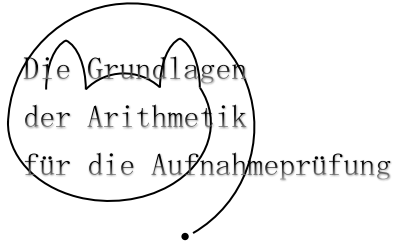
分子が分母より小さい整数である分数を真分数といいます。分母が6の分数のうち、真分数である既約分数は、 $\frac{1}{6}$ と $\frac{5}{6}$ の2個あります。

(1)

- ① 分母が42の真分数である既約分数は何個ありますか。
- ② 分母が210の真分数である既約分数は何個ありますか。
- ③ 分母が294の真分数である既約分数は何個ありますか。

(2) 分母が  の真分数である既約分数は6個あります。 にあてはまる数をすべて答えなさい。

(3) 分母が  の真分数である既約分数は24個あります。 にあてはまる数をすべて答えなさい。



## 最難関問題

真分数である既約分数の個数・1

- (1) ① 12個 ② 48個 ③ 84個 (2) 7, 9, 14, 18  
 (3) 35, 39, 45, 52, 56, 70, 72, 78, 84, 90

(1)

① 素因数分解をすると  $42 = 2 \times 3 \times 7$  ですから、分子は2, 3, 7の倍数ではない42未満の整数です。具体的には、1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41の12個があります。よって、分母が42の真分数である既約分数は12個あります。

② 素因数分解をすると  $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$  です。ここで、新たに素因数に加わった5のことをいったん忘れて、既約分数の分子の候補は、次のように12個の整数の周期的な並びが5回くり返されるので、 $12 \times 5 = 60$  (個) です。

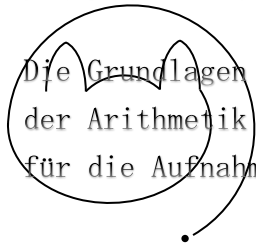
1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41  
 43, 47, 53, 55, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 79, 83  
 ...

$\left. \begin{array}{l} \phantom{1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41} \\ \phantom{43, 47, 53, 55, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 79, 83} \end{array} \right\} + 42$   
 $\left. \phantom{43, 47, 53, 55, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 79, 83} \right\} + 42$

ここから、5の倍数を除きます。 $210 = 5 \times 42$  ですから、 $5 \times 1 \sim 5 \times 42$  という5の倍数のうち、 $5 \times \square$  の  $\square$  に入る部分の数が2, 3, 7の倍数でない数が、上で考えた分子の候補に含まれています。 $\square$  にあてはまる数は、実は①で既に求めている12個の整数に他なりません。

よって、 $60 - 12 = 48$  (個) です。

③ 素因数分解をすると  $294 = 2 \times 3 \times 7 \times 7$  ですから、①の42と比べると、素因数は2, 3, 7のまま変わりません。よって、②で考えた12個の整数の周期的な並びが7回くり返されるだけです。そのため、 $12 \times 7 = 84$  (個) です。



## 最難関問題

(2) 順を追って調べていくと、分母が7や9の場合に真分数である既約分数が6個であることはすぐにわかります。しかし、すべて答えるとなると、どこまで探していけばよいのかがわかりません。よって、(1)をどう活かすのかを考えます。(1)の③では、分母が42の真分数である既約分数が12個であるのに対し、42の素因数でもある素数7をかけてきでる294が分母の、真分数である既約分数は、 $12 \times 7 = 84$  (個) ありました。

それに対して、(1)の②では、 $12 \times 5 = 60$  (個) の候補のうち、12個が5の倍数なので、 $12 \times (5 - 1) = 48$  (個) となりました。以上から、次のことが成り立ちます。

整数Aが分母となっている真分数である既約分数がN個あるとき、  
 素数MがAの素因数であるのなら、分母がA×Mの真分数である既約分数の個数はN×M個、  
 素数MがAの素因数でないのなら、分母がA×Mの真分数である既約分数の個数はN×(M-1)個

整数A自身も素数の積ですから、分母を素因数分解した形で考えます。素数2の個数に注目をして場合分けると、次のようになります。

○  $2 \times 2 \times$  (他の素数をいくつか) の場合

分母が2だと真分数である既約分数は1個なので、分母が $2 \times 2$ だと $1 \times 2 = 2$  (個) です。3をかけて分母を $2 \times 2 \times 3$ とすると、 $2 \times (3 - 1) = 4$  (個) となり、4は6の約数ではないのでここから先はうまくいきません。また、5をかけて分母を $2 \times 2 \times 5$ とすると、 $2 \times (5 - 1) = 8$  (個) となり、大きくなりすぎてしまいます。

このように、真分数である既約分数が6個となる分母は得られません。

○  $2 \times$  (他の素数をいくつか) の場合

分母が2だと真分数である既約分数は1個なので、分母が $2 \times 3$ だと $1 \times (3 - 1) = 2$  (個) です。ここで3をかけて分母を $2 \times 3 \times 3$ とすると、 $2 \times 3 = 6$  (個) となります。よって、分母が $2 \times 3 \times 3 = 18$ の場合、条件を満たします。

次に、分母が $2 \times 5$ だと $1 \times (5 - 1) = 4$  (個) となってうまくいきません。分母が $2 \times 7$ の場合は、 $1 \times (7 - 1) = 6$  (個) となります。よって、分母が $2 \times 7 = 14$ の場合も条件を満たします。

○ 2以外の素数の積の場合

分母が3だと真分数である既約分数は2個なので、分母が $3 \times 3$ だと $2 \times 3 = 6$  (個) となります。よって、分母が $3 \times 3 = 9$ の場合、条件を満たします。分母が5だと真分数である既約分数は4個なのでうまくいきません。分母が7だと真分数である既約分数は6個なので条件を満たします。これ以降は、個数が6より大きくなってしまいます。

以上より、7, 9, 14, 18です。

## 最難関問題

(3) 仕組みはすでに分かったので、(2)と同様に場合分けをして調べていってもよいのですが、(2)の答えが7か9の倍数である点に注意をしてもよいかもしれません。6は3の倍数です。(2)で見た仕組みにおいて、真分数である既約分数が3の倍数になるためには、7や13のように、1を引くと3の倍数になる素因数を含む整数が分母であるか、素因数として3を2個以上含むことによって、 $\square \times (3-1) \times 3$ という計算が成り立つことが必要です。

24も3の倍数ですから、真分数である既約分数が24個となるためには、

- ・素因数として3を2個含む…3個以上含むと、 $(3-1) \times 3 \times 3 \times \dots$ となって、9の倍数になってしまいます。
- ・素因数として7を含む
- ・素因数として13を含む

のいずれかが必要です。なお、25は素数ではないので、 $25-1=24$ によって24個にはなりません。

以上に基づいて場合分けをすると、次のようになります。

○  $3 \times 3 \times$  (他の素数をいくつか) の場合

分母が  $3 \times 3$  だと真分数である既約分数は  $(3-1) \times 3 = 6$  (個) です。さらに4倍すれば24個になるので、次の場合に条件を満たします。

- ・分母が  $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 72$  のときに  $6 \times (2-1) \times 2 \times 2 = 24$  (個)、
- ・分母が  $3 \times 3 \times 2 \times 5 = 90$  のときに  $6 \times (2-1) \times (5-1) = 24$  (個)、
- ・分母が  $3 \times 3 \times 5 = 45$  のときに  $6 \times (5-1) = 24$  (個)

○  $7 \times$  (他の素数をいくつか) の場合

分母が7だと真分数である既約分数は6個です。さらに4倍すれば24個になるので、次の場合に条件を満たします。

- ・分母が  $7 \times 2 \times 2 \times 2 = 56$  のときに  $6 \times (2-1) \times 2 \times 2 = 24$  (個)、
- ・分母が  $7 \times 2 \times 2 \times 3 = 84$  のときに  $6 \times (2-1) \times 2 \times (3-1) = 24$  (個)、
- ・分母が  $7 \times 2 \times 5 = 70$  のときに  $6 \times (2-1) \times (5-1) = 24$  (個)、
- ・分母が  $7 \times 5 = 35$  のときに  $6 \times (5-1) = 24$  (個)

○  $13 \times$  (他の素数をいくつか) の場合

分母が13だと真分数である既約分数は12個です。さらに2倍すれば24個になるので、次の場合に条件を満たします。

- ・分母が  $13 \times 2 \times 2 = 52$  のときに  $12 \times (2-1) \times 2 = 24$  (個)、
- ・分母が  $13 \times 2 \times 3 = 78$  のときに  $12 \times (2-1) \times (3-1) = 24$  (個)、
- ・分母が  $13 \times 3 = 39$  のときに  $12 \times (3-1) = 24$  (個)

よって、35、39、45、52、56、70、72、78、84、90です。